

Notación decimal desde reparto

**El sentido de la medida en Secundaria a
través de la resolución de problemas**

Pablo Beltrán-Pellicer

Universidad de Zaragoza, @pbeltranp (Twitter/X, IG), www.tierradenumeros.com

Número racional (positivo)

- Presente desde 3º de Primaria hasta 4º de ESO, y más allá.
- Abundantes propiedades como conjunto numérico que no tienen los naturales:
 - La división es interna
 - Densidad – concepto de siguiente
 - Etc.
- Algoritmos propios y propiedades propias de las operaciones que *extienden*, pero no siempre *reflejan* las del número natural.

Número racional (positivo)

Históricamente surge a partir de **tres acciones** propias de las actividades de las sociedades antiguas:

- Medir cantidades de magnitud.
- Repartir una cantidad de magnitud en un número entero de partes.
- Intercambiar productos (trueque).

(Escolano, 2007)

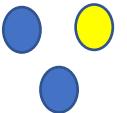
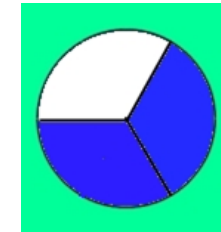
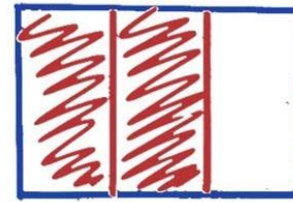
Presente en distintos contextos matemáticos (números, medida, proporcionalidad, semejanza, probabilidad,...) y extra-matemáticos (física, química, arte, ...).

Número racional (positivo)

Desde el punto de vista del aprendizaje, envuelve distintos *registros lingüísticos y representaciones* equivalentes entre sí:

Registro numérico

- Fracción
- Número mixto
- Expresión decimal (número decimal)
- ¿Porcentaje?



“dos tercios”
“dos de cada tres”



$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{2}{3} = 0,666 \dots = 0,\hat{6}$$

$$4,\hat{9} = 5$$

$$7,15 = 7,150$$

Número racional (positivo)

Cinco *significados* asociados (fracción)

- Parte-todo
- Medida
- Cociente
- Razón
- Operador

(Kieren, 1980; Post y otros, 1982; Lamon, 2007;
Gairín y Sancho, 2002; Escolano, 2007)

Medida

¿Cuál es la longitud de esta tira de papel

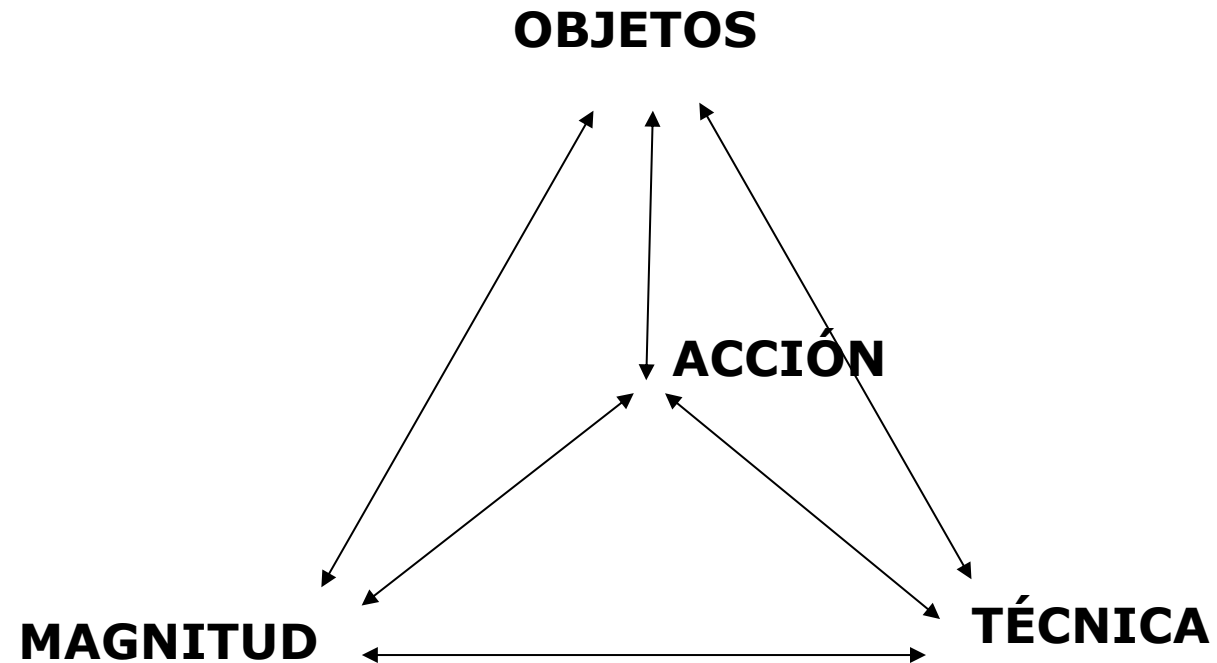


tomando como unidad de medida la longitud de esta otra?

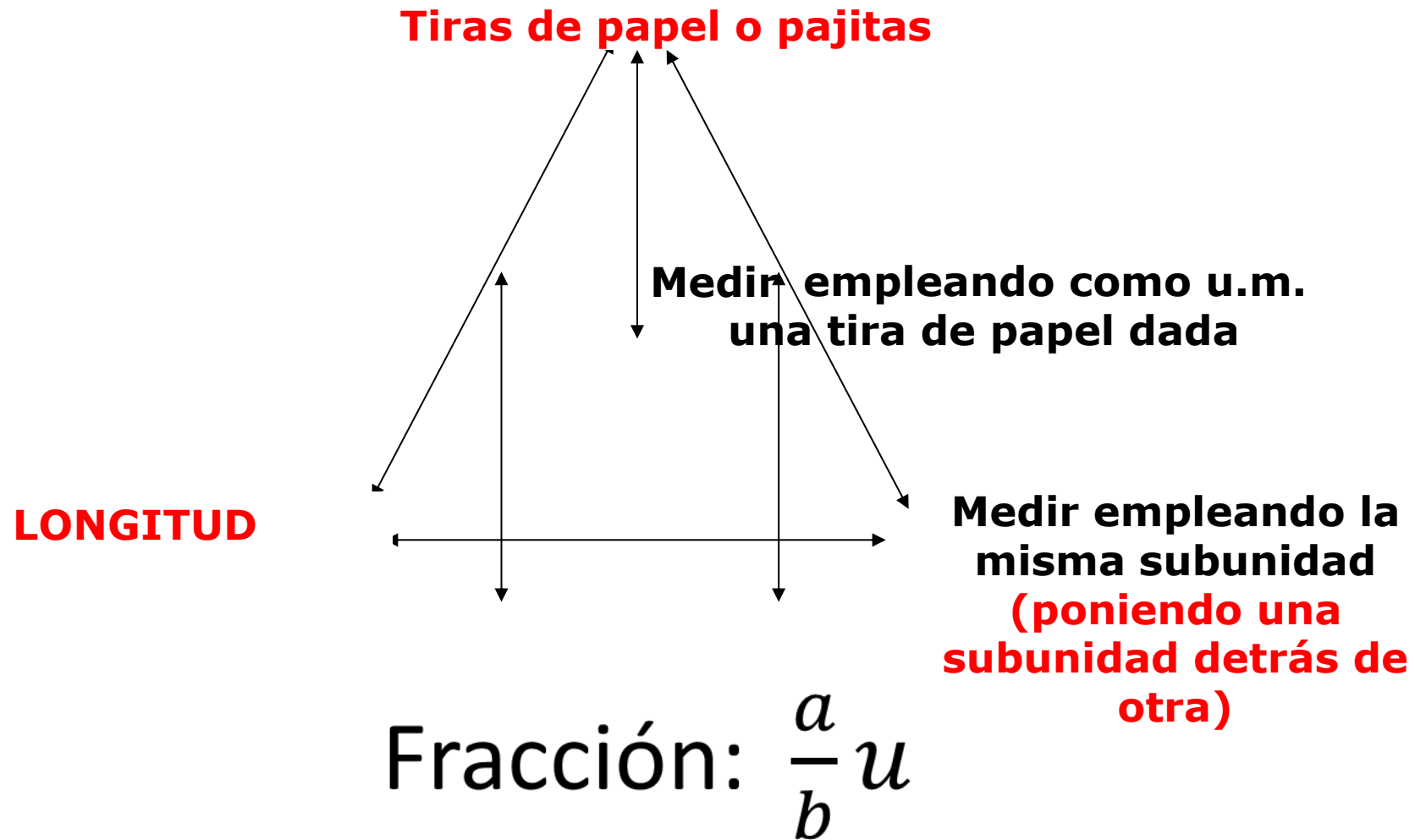


*Medir una determinada cantidad de magnitud tomando otra
como unidad de medida.*

Modelo de aprendizaje



Modelo de aprendizaje



$\frac{a}{b}$ u indica la cantidad de magnitud de un “objeto”

a indica el número de subunidades (piezas) que he necesitado para medir el objeto.

$\frac{1}{b}$ u indica el tamaño de las subunidades (piezas)

b indica el número subunidades necesarias para completar la unidad



Modelo/significado
de reparto



 representaciones01.pdf 

 representaciones02.pdf 

 representaciones03.pdf 

 representaciones04.pdf 

 representaciones05.pdf 

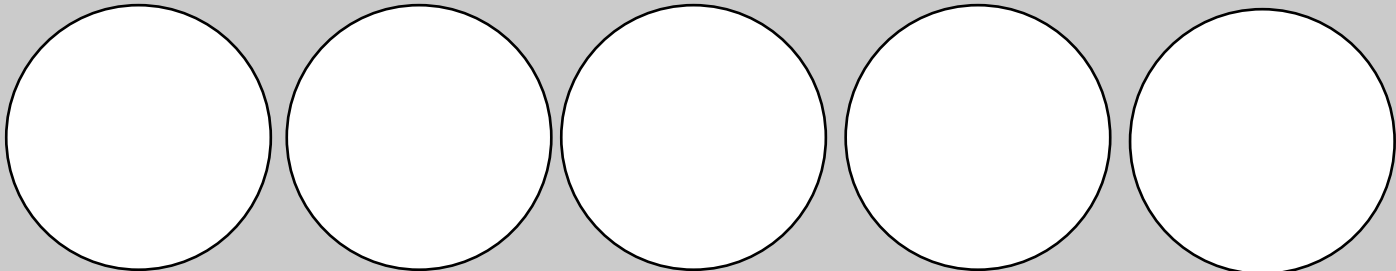


<https://drive.google.com/drive/folders/1bYuk63hZplSlhmAq2hR-qvvTavPddp56?usp=sharing>

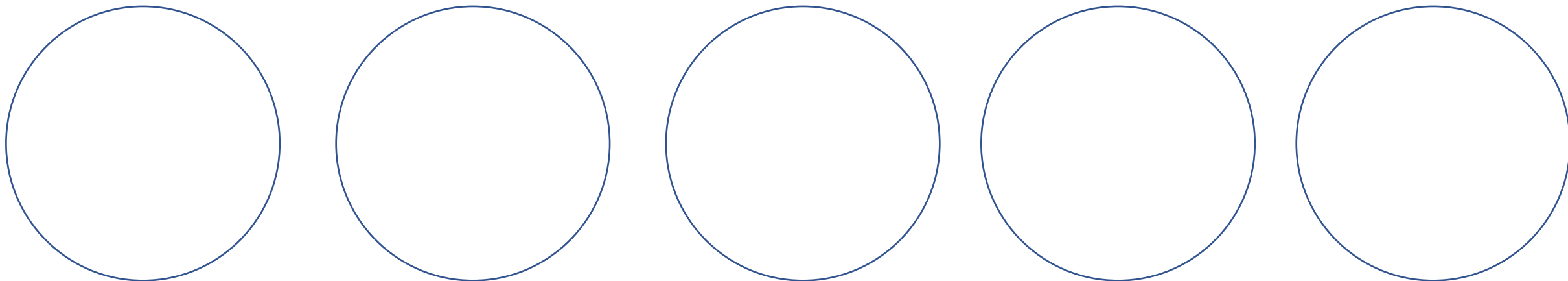
Reparto de tortillas... (objetos fraccionables)

Quieres repartir 5 tortillas entre 3 personas de forma igualitaria.

- Para hacer lo anterior, te pedimos que: si decides realizar cortes en las piezas que tengas que repartir o que te queden por repartir, siempre partas todas las piezas que te queden por repartir en partes iguales.
- Intenta hacer el reparto de, al menos, tres formas esencialmente diferentes (consideraremos que, si has repartido, por ejemplo, $1/3$ de tortilla en un momento dado, repartir $2/6$ es una forma de repartir esencialmente igual).
- Expresa el procedimiento utilizado de forma gráfica, verbal y simbólica, en donde aparezca claramente lo recibido por cada participante a lo largo del reparto.

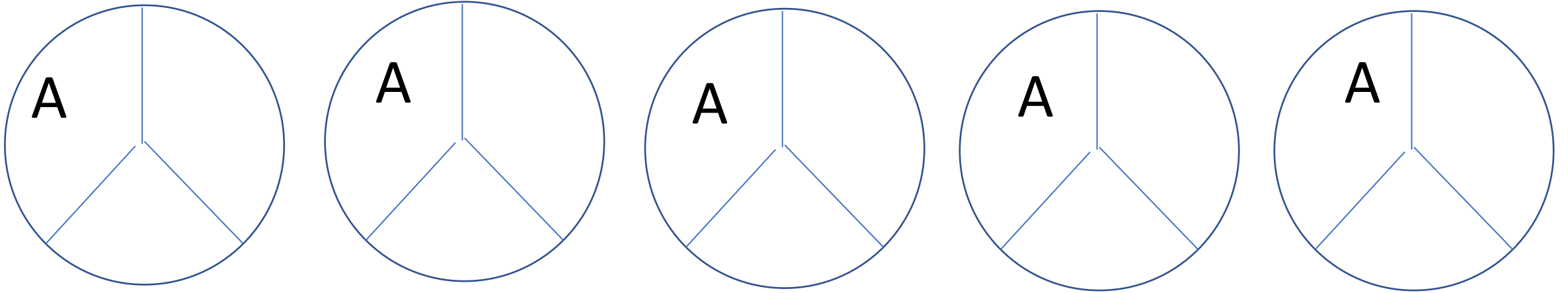
Forma gráfica	Forma hablada	Forma simbólica
	representaciones01.pdf TAREA 2	

TAREA 2



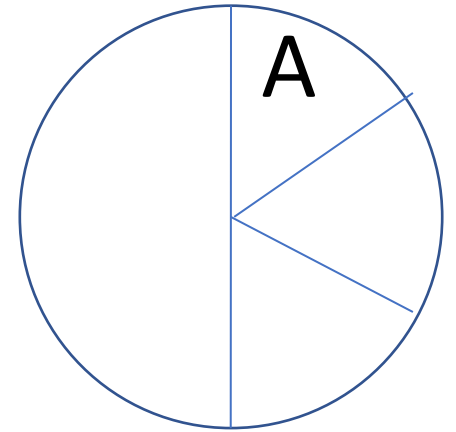
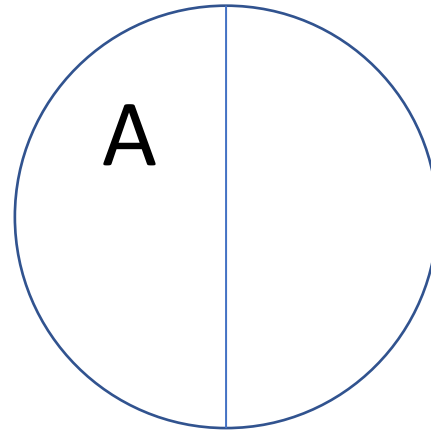
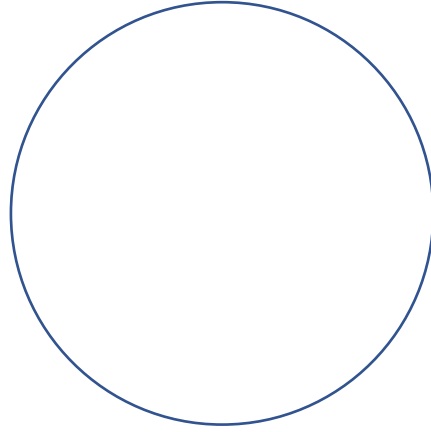
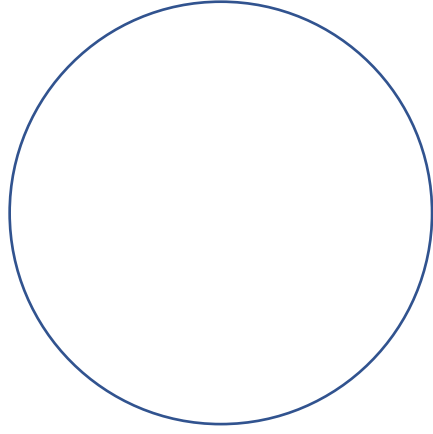
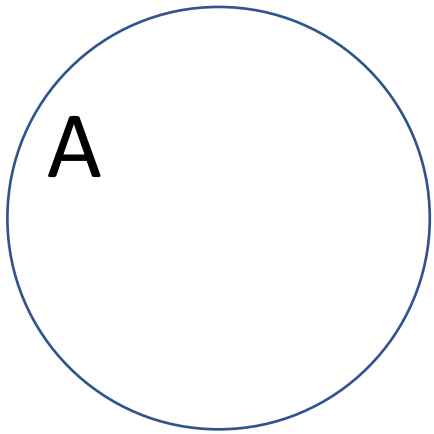
3 PERSONAS A, B, C

TAREA 2



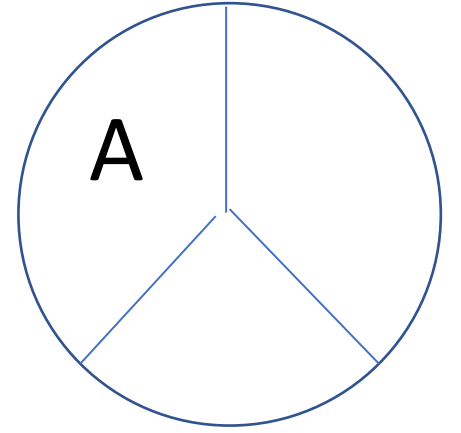
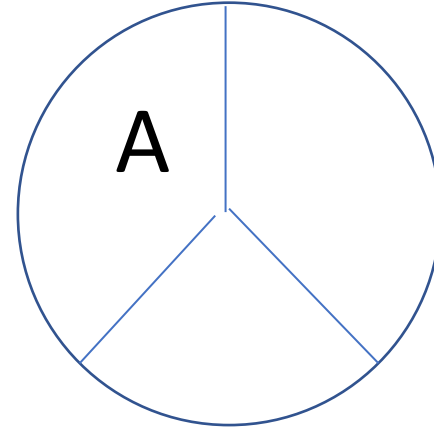
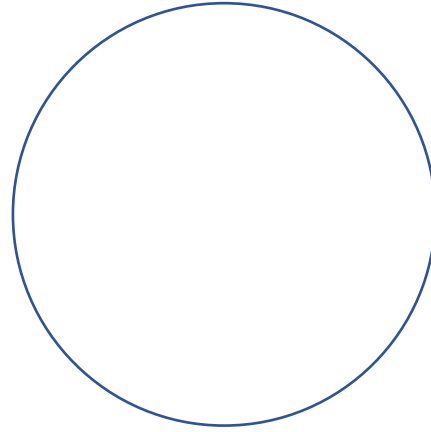
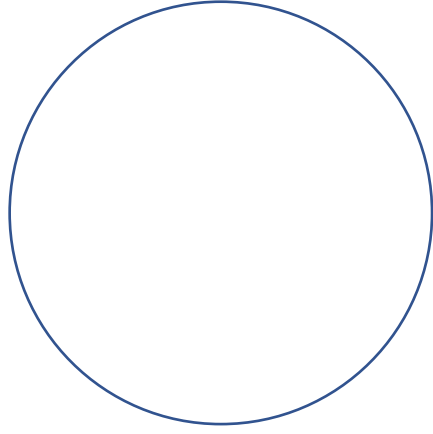
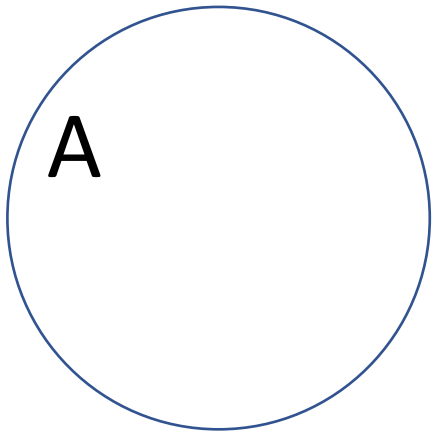
CADA UNO RECIBE $\frac{5}{3}$ *tortilla*

TAREA 2



CADA UNO RECIBE $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \textit{tortilla}$

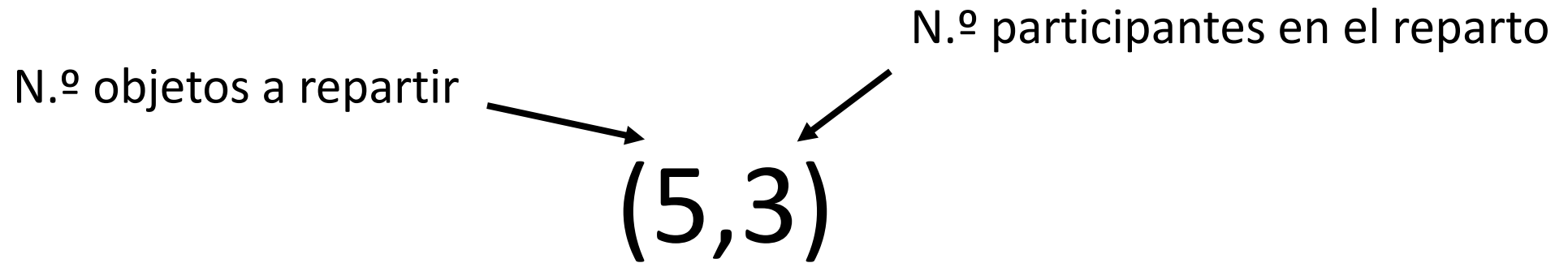
TAREA 2



CADA UNO RECIBE $1 + \frac{2}{3}tortilla$

Una manera de enfatizar el significado

¿Cambio de notación? Podemos empezar con fracciones directamente, pero si queremos *esconder* el nuevo significado...



5	3
---	---

Representación simbólica del proceso (tabla)

TAREA 3: Con los diferentes repartos realizados en la tarea anterior, intenta rellenar una tabla como la siguiente. Consideraremos fases distintas, cuando hayamos repartidos trozos de diferente tamaño a los participantes.

representaciones02.pdf
TAREA 3

Fase	Tamaño trozos	Lo que tengo	Lo que doy a cada uno	Lo que doy en total	Lo que me sobra
1					
2					
3					
...					

Cada participante ha recibido:

TAREA 3

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1/3	15	5	15	0

CADA UNO RECIBE $5\frac{1}{3}$ *tortilla*

TAREA 3

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	5	1	3	2
2	1/2	4	1	3	1
3	1/6	3	1	3	0

CADA UNO RECIBE $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \text{tortilla}$

TAREA 3

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	5	1	3	2
2	$1/3$	6	2	6	0

CADA UNO RECIBE $1 + 2\frac{1}{3}$ *tortilla*

¿Qué significan?

- (a, b)
- (b, a)
- (a, a)
- $(a, 0)$
- $(0, a)$

Equivalencia

Desde el modelo de reparto igualitario, responde:

- a. Explica qué significa que dos repartos sean equivalentes.
- b. Justifica razonadamente que los repartos (2,3) y (6,9) son equivalentes.

Orden de números racionales

- a) Indica cuándo un reparto es mayor que otro.
- b) En cada uno de los casos, justifica razonadamente cuál de los repartos es mayor o menor:

(4,5) y (7,5)

(4,5) y (4,7)

(3,5) y (4,7)

Densidad

- a. Encuentra el reparto anterior a $\frac{3}{4}$. Encuentra el reparto siguiente a $\frac{4}{7}$.
- b. Escribe 5 repartos que cumplan la doble condición de ser menores que $\frac{3}{5}$ y mayores que $\frac{4}{7}$.

TAREA 4: Si consideramos una fracción $\frac{a}{b}$ con significado de reparto, es decir, consideramos que a es un número de “objetos” repartidos y “ b ” el número de participantes en el reparto y $\frac{a}{b}$ indica por un lado estas condiciones de reparto y, por otro, la cantidad obtenida por cada participante ...

- a) Indica, justificando desde el significado anterior, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

$\frac{a}{b} < \frac{2a}{b-1}$	
$\frac{a}{b} < \frac{2a}{b+2}$	
$\frac{a+1}{a} > \frac{a}{a-1}$	

b) Justifica un posible significado, o una situación en la que tenga sentido, para que dadas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, tenga sentido considerar $\frac{a+c}{b+d}$. ¿Esta fracción será mayor, menos, igual, ... que las fracciones dadas? Justifica utilizando el significado de reparto.

c) Usando el resultado del apartado anterior, calcula 5 fracciones mayores que $\frac{9}{8}$ y menores que $\frac{8}{7}$

Socialización de repartos

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{7}$$

$$¿ \frac{7}{12} ?$$

TAREA 4

- Socialización de repartos
- Tengo dos repartos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$
- Si nos juntamos todos y juntamos las tortillas los que cenaban más cada uno cederán parte de sus tortillas a los que cenaban menos

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

Problemas desde el modelo de reparto

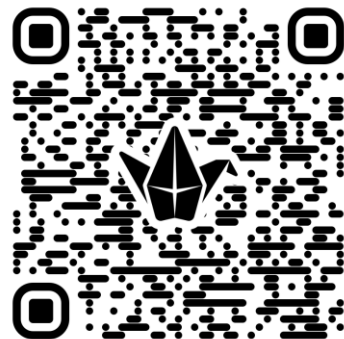
- Suma de fracciones: $\frac{4}{9} + \frac{3}{7}$
- Resta de fracciones: $\frac{4}{9} - \frac{3}{7}$
- Producto de natural por fracción: $5 \cdot \frac{3}{7}$
- Cociente de fracción entre natural: $\frac{3}{2} : 6$

Unos repartos especiales

TAREA 5: Unos repartos especiales. A partir de ahora vamos a utilizar solo las siguientes técnicas de repartos en varias fases:

Repartimos primero tortillas enteras, si sobran, los trozos sobrantes los partiremos siempre en n partes iguales y volvemos a repartir. Si sobrasen, estos trozos los partiremos en n partes iguales y volvemos a repartir y así sucesivamente.

Objetivo: Reparte 3 tortillas entre 5 personas con la técnica anterior para los valores de n que se indican en cada caso.



<https://padlet.com/pbeltran29/representaciones-jzpu3mkiw16yh1hi>

TAREA 5 3 tortillas 5 personas n=10

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	3	0	0	3
2	1/10	30	6	30	0

Cada uno recibe $6\frac{1}{10}$ *tortillas*

TAREA 5 3 tortillas 5 personas n=6

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	3	0	0	3
2	1/6	18	3	15	3
3	1/36	18	3	15	3

Cada uno recibe $3\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6^2} + \cdots$ *tortillas*

TAREA 6 5 tortillas 3 personas $n=10$

Cada uno recibe $1 + 6\frac{1}{10} + 6\frac{1}{10^2} + \cdots$ *tortillas*

TAREA 6 5 tortillas 3 personas $n=6$

Cada uno recibe $1 + 4\frac{1}{6}$ *tortillas*

TAREA 7: Reflexiona, conjetura y prueba.

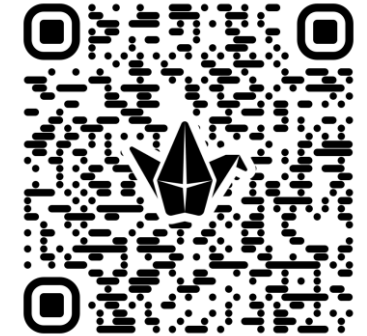
- a) Cuando realizamos repartos por la técnica de las tareas anteriores, ¿de qué depende que el reparto pueda terminar en un número finito de fases? Intenta justificar tu respuesta. Cuando miramos lo que obtiene cada participante por la técnica anterior cuando $n = 10$, ¿qué se obtiene? ¿Y cuando $n = 6$?

- b)** Cuando realizamos repartos por la técnica de las tareas anteriores, ¿es posible que el reparto tenga un número infinito de fases sin que encontremos un “periodo”? ¿Por qué? Intenta responder basándote en cómo se generan las tablas de las tareas anteriores.

TAREA 8: Encontrar las condiciones iniciales de un reparto decimal con un número finito de fases.

Al hacer un reparto de a tortillas entre b personas por la técnica de reparto decimal ($n = 10$) hemos obtenido la siguiente tabla de la que sabemos los datos que aparecen. Averigua completando la tabla cuántas tortillas y cuántas personas había en el reparto.

Fase	Tamaño trozos	Lo que tengo	Lo que doy a cada uno	Lo que doy en total	Lo que me sobra
1	1		3		
2	1/10		1		
3	1/100		2		
4	1/1000		5		0



<https://padlet.com/pbeltran29/representaciones-tareas-8-9-y-10-hbt17u1om4pfy3s>

TAREA 8

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1		3		
2	1/10		1		
3	1/100		2		
4	1/1000		5		0

TAREA 8

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	a	3		
2	1/10		1		
3	1/100		2		
4	1/1000		5		0

TAREA 8

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	a	3	3b	
2	1/10		1		
3	1/100		2		
4	1/1000		5		0

TAREA 8

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	a	3	3b	a-3b
2	1/10		1		
3	1/100		2		
4	1/1000		5		0

TAREA 8

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	a	3	$3b$	$a-3b$
2	1/10	$10a-30b$	1	b	$10a-31b$
3	1/100		2		
4	1/1000		5		0

TAREA 8

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	a	3	$3b$	$a-3b$
2	1/10	$10a-30b$	1	b	$10a-31b$
3	1/100	$100a-310b$	2	$2b$	$100a-312b$
4	1/1000		5		0

TAREA 8

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	a	3	3b	a-3b
2	1/10	10a-30b	1	b	10a-31b
3	1/100	100a-310b	2	2b	100a-312b
4	1/1000	1000a-3120b	5	5b	1000a-3125b=0

TAREA 8

$$1000a - 3125b = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3125}{1000} = \frac{125}{40} = \frac{25}{8}$$

TAREA 9

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1		3		
2	1/10		1		
3	1/100		2		
4	1/1000		2		

TAREA 9

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1		3		
2	1/10		1		
3	1/100		2		
4	1/1000		2		

TAREA 9

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	a	3	$3b$	$a-3b$
2	1/10	$10a-30b$	1	b	$10a-31b$
3	1/100	$100a-310b$	2	$2b$	$100a-312b$
4	1/1000		2		

TAREA 9

$$10a - 31b = 100a - 312b$$

$$281b = 90a$$

$$\frac{281}{90} = \frac{a}{b}$$

TAREA 10

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1		3		
2	1/6		5		
3	1/36		5		
4	...		...		

TAREA 10

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy total	Sobra
1	1	a	3	$3b$	$a-3b$
2	$1/6$	$6a-18b$	5	$5b$	$6a-23b$
3	$1/36$		5		
4	...		...		

TAREA 10

$$6a - 23b = a - 3b$$

$$5a = 20b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{20}{5}$$



$(5, 8)$

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 8} \\ 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 0.625 \end{array}$$

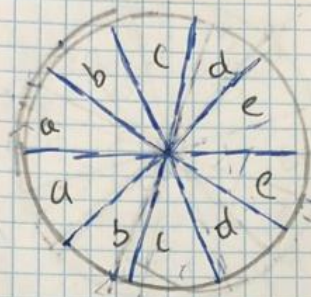
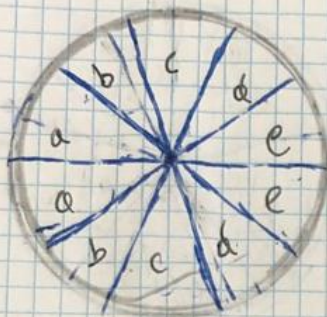
$$\begin{array}{r} 20 \\ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 040 \\ 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 00 \end{array}$$

Lo que tengo	Lo que doy	Lo que doy en total	Lo que sobra
5 [1]	0 [1]	0 [1]	5 [1]
50 [1/10]	6 [1/10]	48 [1/10]	2 [1/10]
20 [1/10 ²]	2 [1/10 ²]	16 [1/10 ²]	4 [1/10 ²]
10 [1/10 ³]	5 [1/10 ³]	40 [1/10 ³]	0 [1/10 ³]

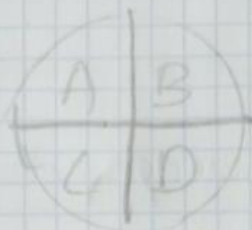
$$\frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{600}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$$



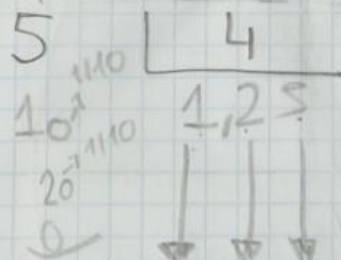
T 2
(3, 5)

	Lo que tengo 3[1]	Lo que doy a cada uno en esta fase 0[1]	Lo que doy en total en cada fase 0[1]	Lo que sobra en esta fase 3[1]
1ª Fase				
2ª Fase	30[110]	6[110]	30[10]	0[10]

A B C D = personas



TECHICAS



Unidad

1/10

1/100

5 tortillas = 1 para cada uno

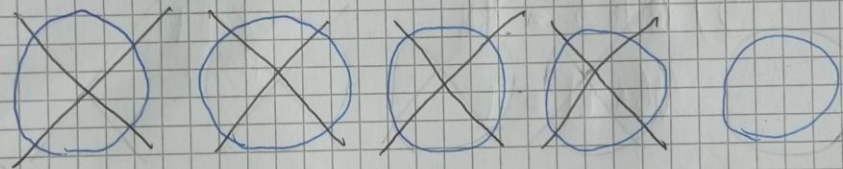
La tortilla que sobra se parte en 10 cachas.

10 horas = 2 horas para cada persona y sobran 2

Las 2 horas que sobran se parten en 10 cada uno

20 horas = 5 horas para cada persona.

Fase 1



una para cada persona.

Fase 2



Se divide en 10 horas iguales dando así 2 para cada persona y sobrando también 2.

Fase 3



Se subdividen en 10 horas iguales cada una (en total 20) y como 20 es múltiplo de 4 (4×5) ya se acaban las fases de reparto.

una tortilla.
2 horas de tortilla.
5 horas de los
2 horas de tortilla.
1.25

En total cada persona se lleva 1,25 de tortilla.

Fase 1

Lo q tengo

Lo q doy a cada uno

Lo q doy en total

Lo q sobra

5 tortillas

1 tortilla

4 tortillas

1 tortilla

Fase 2

1 tortilla

2 horas de tortilla

8 horas de tortilla

2 horas de tortilla

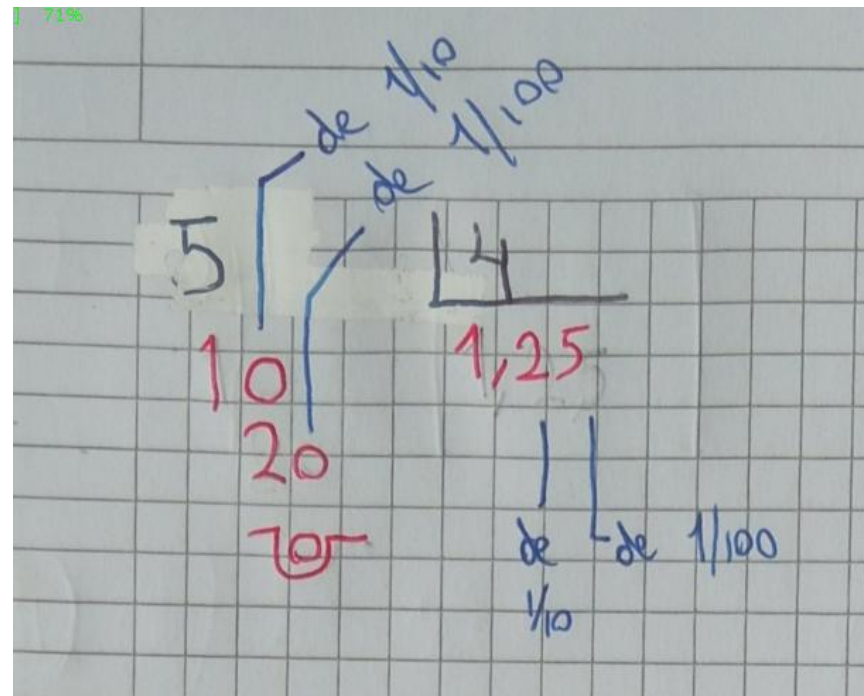
Fase 3

2 horas de tortilla

5 horas de los 2 horas de tortilla

20 horas de los dos horas de tortilla

0 horas.



Dos grupos de Telegram

De la aritmética al álgebra

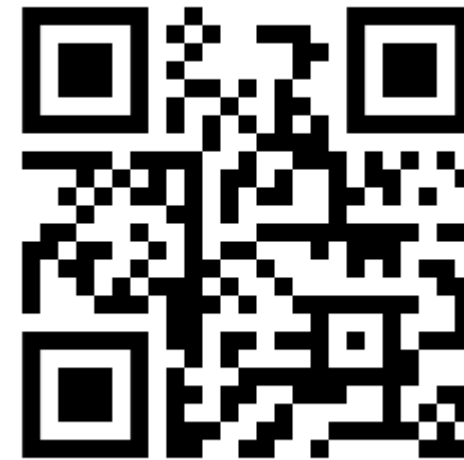
Comunidad de docentes interesados en el enfoque didáctico de introducción escolar del número entero en un entorno algebraico (tesis de Eva Cid).



<https://t.me/+cvKQXoyDrfAwZjdk>

Números racionales

Comunidad internivelar de docentes interesados en una aproximación didáctica al número racional desde la resolución de problemas y atendiendo a sus diferentes significados, privilegiando el trabajo con magnitudes y la medida.



<https://t.me/+BBaYf0FZZlszYTc8>

Y un podcast



REFERENCIAS Y CRÉDITOS

Referencias

- Beltrán-Pellicer, P. (2021). [Recuerdos del ayer](#). *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(2), 69-79.
- Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S. (2021). [Enseñar a través de la resolución de problemas](#). *Suma*, 98, 11-21.
- Escolano, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: Un estudio desde los modelos de medida y cociente*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza. <https://zaguan.unizar.es/record/84666/files/?ln=es>
 - En los anexos de la tesis de Rafael Escolano hay una propuesta para primaria implementada en el aula.
- Gairín, J. M., & Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos*. Ed. Síntesis.
 - Primaria y secundaria, con todos los significados del racional y algunos aspectos sobre el natural.
- Domenech, A., & Martínez-Juste, S. (2018). *Midiendo como los egipcios*. Unidad didáctica para 1º/2º ESO basada, entre otras, en las referencias anteriores.
 - <https://twitter.com/SergioMJGR/status/1233098923029471232>
- Liljedahl, P. (2021). *Building Thinking Classrooms*. Corwin

Referencias

- Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1991). *El problema de la medida*. Síntesis.
- Domenech, A., & Martínez-Juste, S. (2019). Actividades de razonamiento «up and down» para trabajar las fracciones en 1.º de ESO. *Entorno Abierto*, 29, 13-18.
- Martínez-Juste, S. (2020). Elaboración y consolidación de secuencias didácticas innovadoras de matemáticas en secundaria mediante el desarrollo de Lesson Studies. *Libro de actas de CIMIE19: AMIE*. AMIE.
- Martínez-Juste, S., & Domenech, A. (2019). Lesson study para innovar en matemáticas. *Entorno abierto*, 30, 7-10.