



Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas



**GOBIERNO
DE ARAGON**

arcomat



MINISTERIO
DE EDUCACIÓN, FORMACIÓN PROFESIONAL
Y DEPORTES



PCT de refuerzo de la
**COMPETENCIA
MATEMÁTICA**

Proporcionalidad

Desarrollo competencial del sentido numérico en ESO

Sergio Martínez Juste

smartinezju@aragon.es

Coordinador programa ARCOMAT

Índice

Introducción

Características de la propuesta

Trayectoria de aprendizaje

Situaciones introductorias

Más allá de la aritmética

Algunos resultados de la investigación

Introducción

¿Qué es la proporcionalidad?

$$f: M_1 \longrightarrow M_2 \quad f \text{ lineal}$$

Introducción

¿Qué es la proporcionalidad?

Si 5 entradas me han costado 37,50 €, ¿cuánto me habrían costado 3 entradas?

5	-----	37,50
3	-----	x

Introducción

Contesta de la forma que creas más oportuna a la pregunta que se plantea:

Un artesano está fabricando un tipo específico de objeto para un mercadillo. Dicho objeto se compone de 3 piezas. Las piezas de tipo I las hace a una velocidad de 5 piezas/hora, las piezas de tipo II las hace a una velocidad de 2 piezas la hora, y las de tipo III a una velocidad de 3 piezas la hora. Si el artesano dispone de 62 horas de trabajo antes del mercadillo, ¿cómo le recomendarías que repartiese su tiempo?

Introducción

ACTIVIDADES

- 22.** Reparte 200 € en partes inversamente proporcionales a 4, 10 y 20.
- 23.** Un grupo de amigos se reparte 2 000 € en partes inversamente proporcionales al tiempo que han tardado en hacer un trabajo. Si Juan tardó 2 minutos; Roberto, 4 minutos, y Jesús, 5 minutos, ¿qué cantidad le corresponderá a cada uno?

* Repartir una cantidad P de forma inversamente proporcional a las cantidades $x, y, z, \dots$, equivale a determinar unos valores desconocidos $a, b, c, \dots$, que verifiquen la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \dots = \frac{P}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots}$$

donde $P = a + b + c + \dots$

Introducción

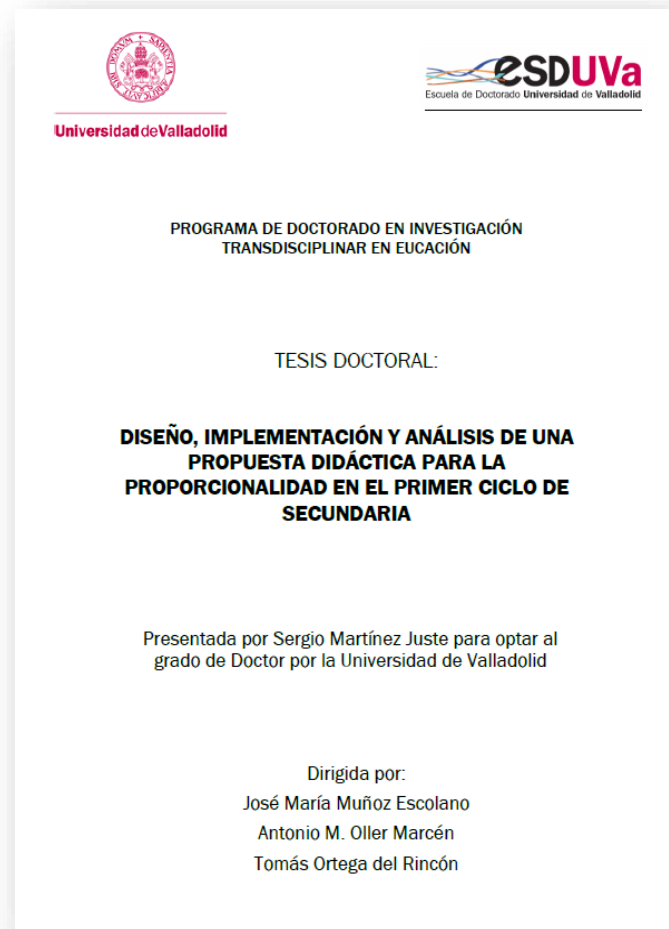
Un problema de reparto inversamente proporcional en la XXIX Olimpiada matemática aragonesa

Problema 1

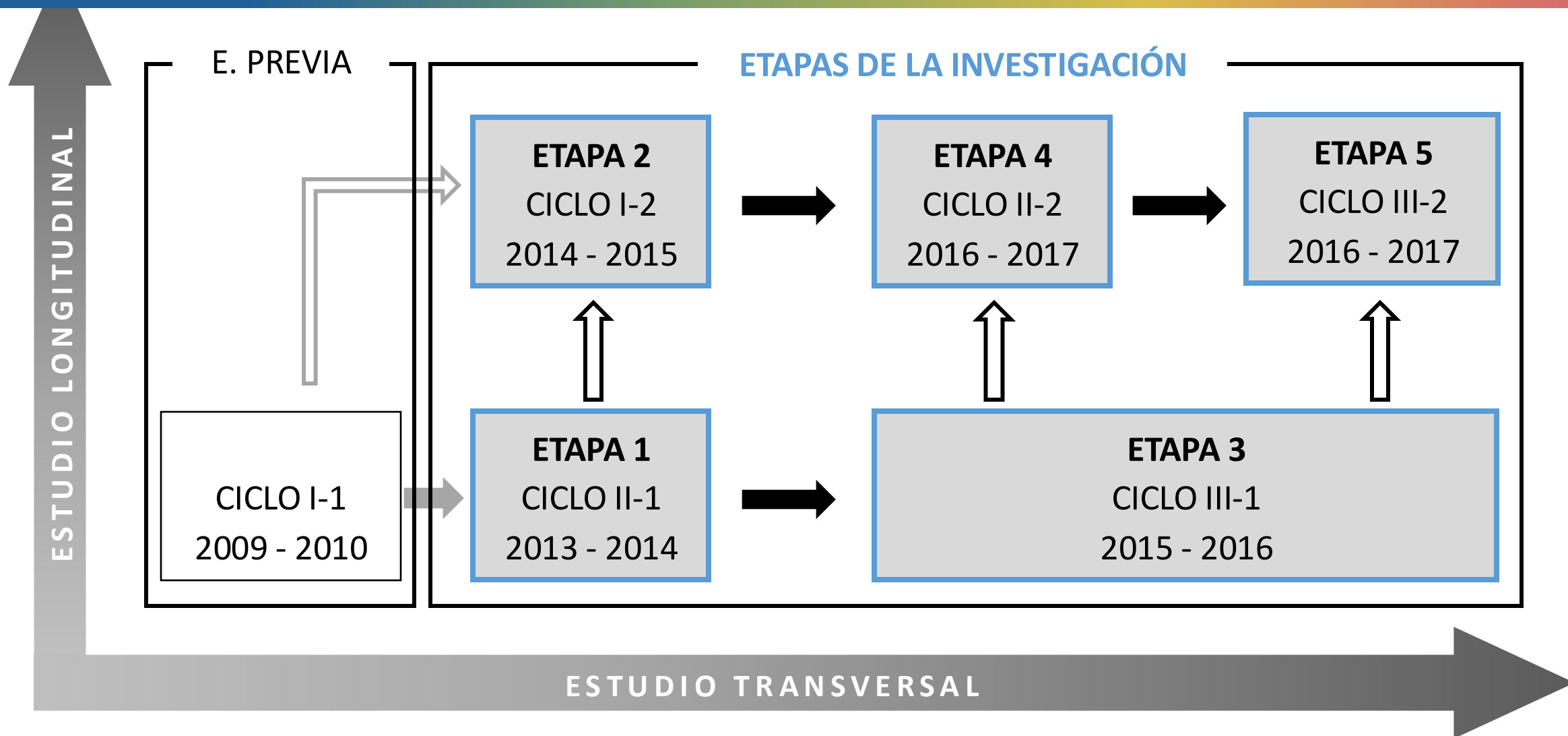
La Gran Final

Ana y Bernardo, dos concursantes de un famoso programa de cocina, han llegado a la Gran Final. Para realizar sus platos, ambos tendrán un tiempo de 3 horas. En ese tiempo, tendrán que hacer un menú completo de tres platos (un entrante, un principal y un postre) para el máximo número de personas posible. Ana, en su planificación, ha calculado que puede hacer 12 entrantes por hora, 6 principales por hora y 9 postres por hora. Bernardo, ha decidido hacer un menú más sencillo y sabe que puede hacer 9 platos (del tipo que sea) por hora. No podemos valorar lo rica que harán la comida, pero, ¿alguno conseguirá hacer un mayor número de menús completos?

Introducción



Introducción



Introducción

Foco 1. Detección y caracterización de **relaciones** de proporcionalidad

Foco 2. Problemas en situaciones de **proporcionalidad simple directa**

Foco 3. Problemas en situaciones de **proporcionalidad simple inversa**

Foco 4. Problemas en situaciones de **proporcionalidad compuesta**

Foco 5. Repartos **proporcionales**

Foco 6. Interpretación del **porcentaje** y problemas asociados

Introducción

Aspectos conceptuales y del contenido

Aproximación
histórica

Estructura
conceptual

Aspectos
fenomenológicos

Tipos de tareas
escolares

Práctica educativa

Aspectos cognitivos

Razonamiento proporcional

Actuaciones de los
estudiantes

Factores que influyen en la
actuación de los estudiantes

Propuestas y experiencias de enseñanza

Dirigidas a alumnos de
primaria y secundaria

Dirigidas a maestros y
profesores en formación

Introducción

Algunas ideas iniciales

- Implicaciones del enfoque de enseñanza “a través de la resolución de problemas”.
- Trabajo aritmético y trabajo algebraico.
- Estrategias generalizables frente a estrategias dependientes de variables de la tarea.

Introducción

La importancia de las operaciones binarias en la aritmética. Estructuras semánticas

Los razonamientos aritméticos se sustentan en el control semántico de las operaciones que realizamos.

¿Cuándo tiene sentido sumar o restar? ¿En qué fenómenos aparecen las sumas y las restas?

¿Cuándo tiene sentido multiplicar o dividir? ¿En qué fenómenos aparecen las multiplicaciones y divisiones?

Introducción

Estructuras semánticas

Problemas aditivos: Estados, comparaciones, transformaciones,...

Problemas multiplicativos: Estados, comparaciones, razones,...

La proporcionalidad está íntimamente ligada a las estructuras multiplicativas y al pensamiento relativo

Introducción

Para saber más sobre estructuras semánticas:

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y división*. Madrid: Síntesis.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Nueva York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicatives Structures. En J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: NCTM.

Introducción

Tarea: ¿Con qué operaciones binarias diferentes podrías comenzar el siguiente problema? ¿Qué significa el resultado de cada una?

Para la masa de la pizza, la receta indica que debemos mezclar 10 ml de aceite por cada 350 gramos de harina. Si voy a emplear 500 gramos de harina, ¿cuántos mililitros de aceite debería echar?

Tarea: Si resolvemos el siguiente problema a partir de dar significado a operaciones binarias, ¿cuántas formas diferentes hay de resolverlo? Intenta resolverlo de diferentes formas:

Si 10 vacas consumen 300 kg de pienso en 20 días. ¿Cuánto pienso necesitaríamos para alimentar 45 días a 8 vacas?

Introducción

¿Con qué operaciones binarias diferentes podrías comenzar el siguiente problema? ¿Qué significa el resultado de cada una?

Para la masa de la pizza, la receta indica que debemos mezclar 10 ml de aceite por cada 350 gramos de harina. Si voy a emplear 500 gramos de harina, ¿cuántos mililitros de aceite debería echar?

Introducción

Si resolvemos el siguiente problema a partir de dar significado a operaciones binarias, ¿cuántas formas diferentes hay de resolverlo? Intenta resolverlo de diferentes formas:

Si 10 vacas consumen 300 kg de pienso en 20 días. ¿Cuánto pienso necesitaríamos para alimentar 45 días a 8 vacas?

Introducción

Si resolvemos el siguiente problema a partir de dar significado a operaciones binarias, ¿cuántas formas diferentes hay de resolverlo? Intenta resolverlo de diferentes formas:

Si 10 vacas consumen 300 kg de pienso en 20 días. ¿Cuánto pienso necesitaríamos para alimentar 45 días a 8 vacas?

¿Alguien ha resuelto el problema sin pasar por el cálculo de la cantidad de pienso diaria que consume una vaca?

Características de la propuesta

Características de la propuesta

Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad

- Caracterización por constancia ➡ Condición de regularidad
- ¿Cómo definimos una relación de proporcionalidad?

Según la definamos, de dicha definición se desprenden unas propiedades de forma más o menos inmediata y las técnicas de resolución de problemas empleadas deben ser coherentes con dichas propiedades.

$$f(x) = kx$$

$$f(tx) = tf(x)$$

$$f(v + x) = f(v) + f(x)$$

Características de la propuesta

Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad

- Caracterización por constancia → Condición de regularidad

En el supermercado he pagado 15 € por comprar 30 productos.

Magnitudes directamente proporcionales **suponiendo que todos los productos valen lo mismo**

Razón 1: $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ **euros por cada producto**

Razón 2: $\frac{30}{15} = 2$ **productos por cada euro**

Características de la propuesta

El tipo de magnitudes influye en la facilidad para interpretar la razón como tanto por uno

El precio de 4m de tela es 20 €.

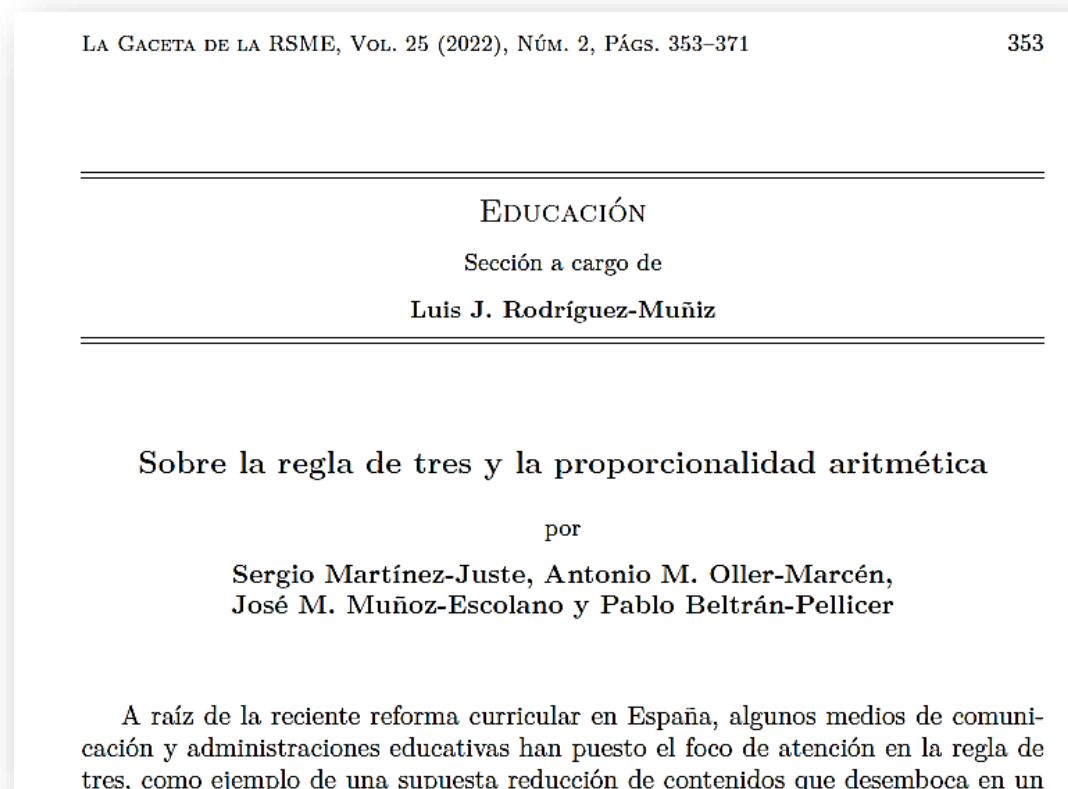
Por cada 100 gr de harina echamos 15 gr de azúcar.

Entre 5 amigos hemos hecho 15 pulseras para un mercadillo.

Características de la propuesta

Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

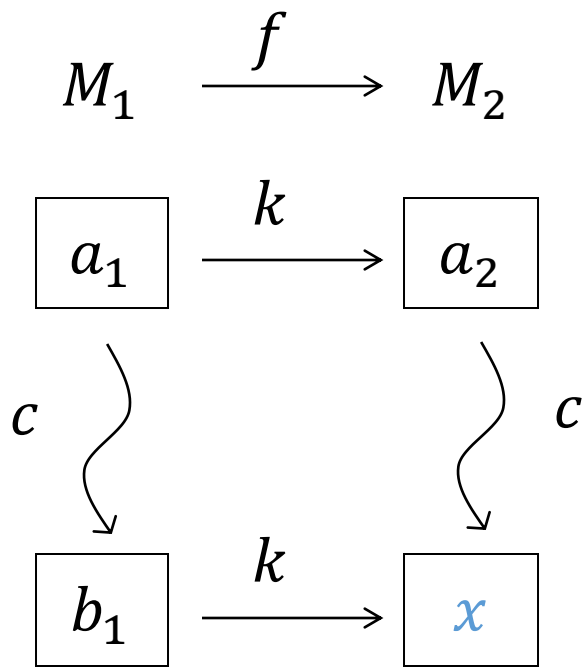
■ ~~Regla de 3~~



Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la razón externa

Valor perdido



Si para andar 10 km he necesitado 2 horas

Para andar 20 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Si para andar 10 km he necesitado 2 horas

Para andar 15 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

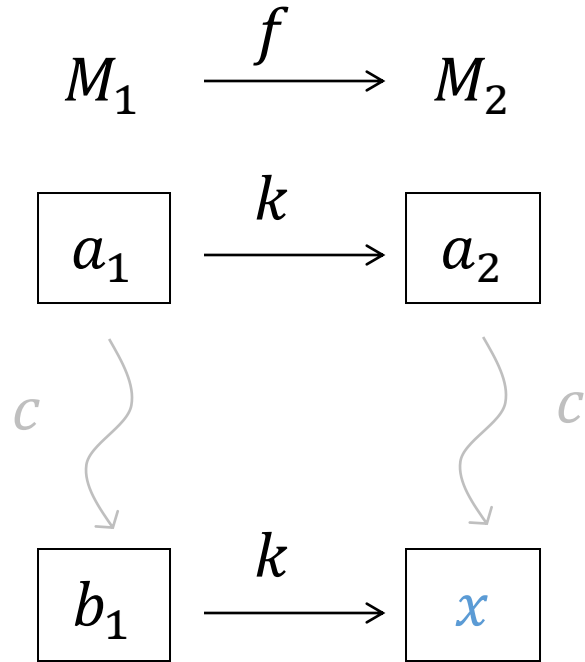
Si para andar 11 km he necesitado 2 horas

Para andar 17 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la razón externa

Valor perdido



Si para andar 10 km he necesitado 2 horas

Para andar 20 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Si para andar 10 km he necesitado 2 horas

Para andar 15 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

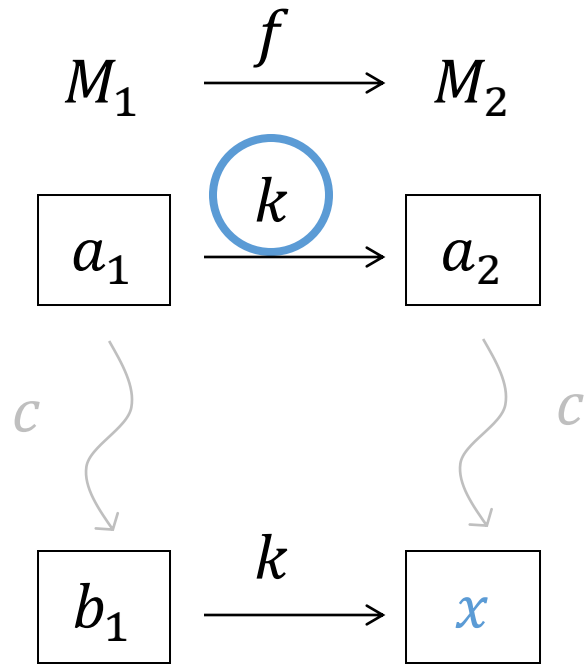
Si para andar 11 km he necesitado 2 horas

Para andar 17 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la razón externa

Valor perdido



Si para andar 10 km he necesitado 2 horas

Para andar 20 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Si para andar 10 km he necesitado 2 horas

Para andar 15 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

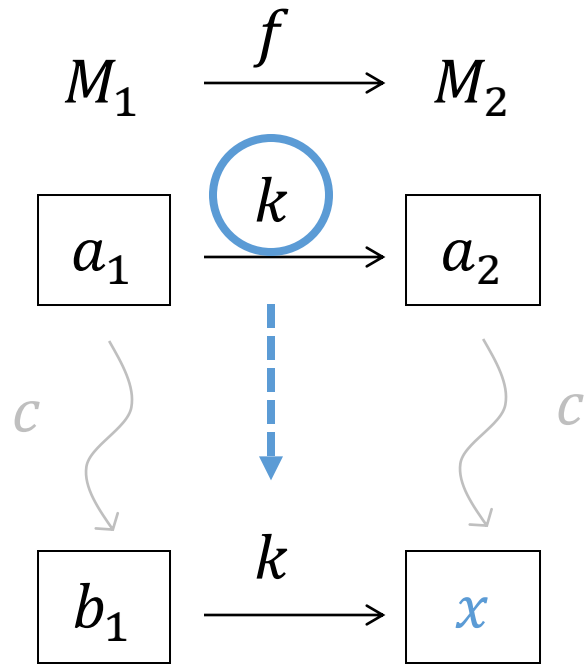
Si para andar 11 km he necesitado 2 horas

Para andar 17 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la razón externa

Valor perdido



Si para andar 10 km he necesitado 2 horas

Para andar 20 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Si para andar 10 km he necesitado 2 horas

Para andar 15 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

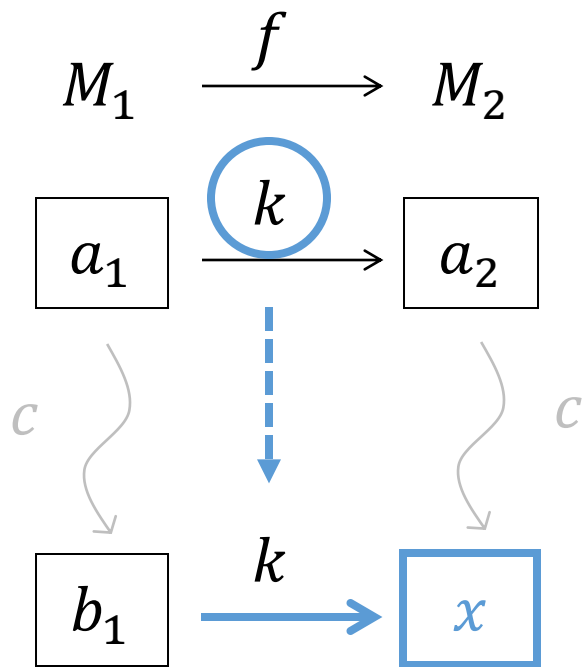
Si para andar 11 km he necesitado 2 horas

Para andar 17 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la razón externa

Valor perdido



Si para andar 10 km he necesitado 2 horas
Para andar 20 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Si para andar 10 km he necesitado 2 horas
Para andar 15 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Si para andar 11 km he necesitado 2 horas
Para andar 17 km, ¿cuánto tiempo tendré que emplear?

Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

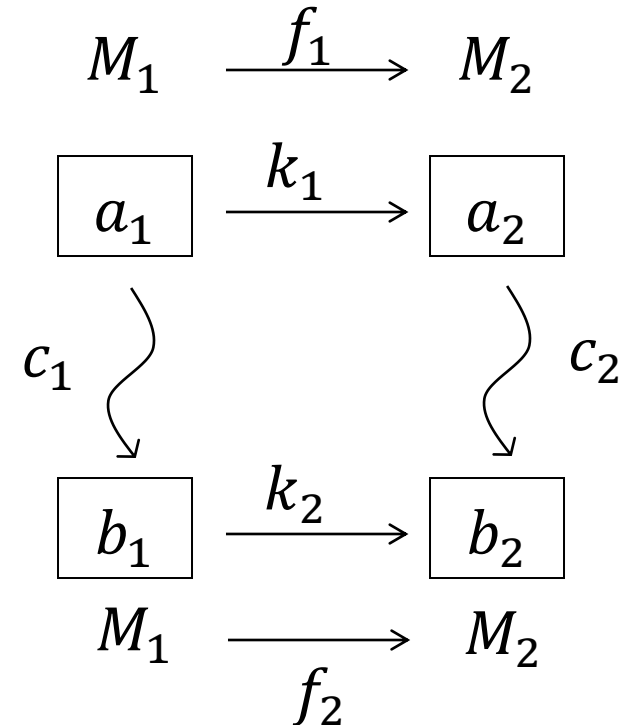
- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la razón externa

Iván: Para andar 10 km ha necesitado 2 horas
Paloma: Para andar 20 km ha necesitado 3,5 horas
¿Quién va más rápido?

Iván: Para andar 10 km ha necesitado 2 horas
Paloma: Para andar 15 km ha necesitado 3,5 horas
¿Quién va más rápido?

Iván: Para andar 10 km ha necesitado 2 horas
Paloma: Para andar 17 km ha necesitado 3,5 horas
¿Quién va más rápido?

Comparación



Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

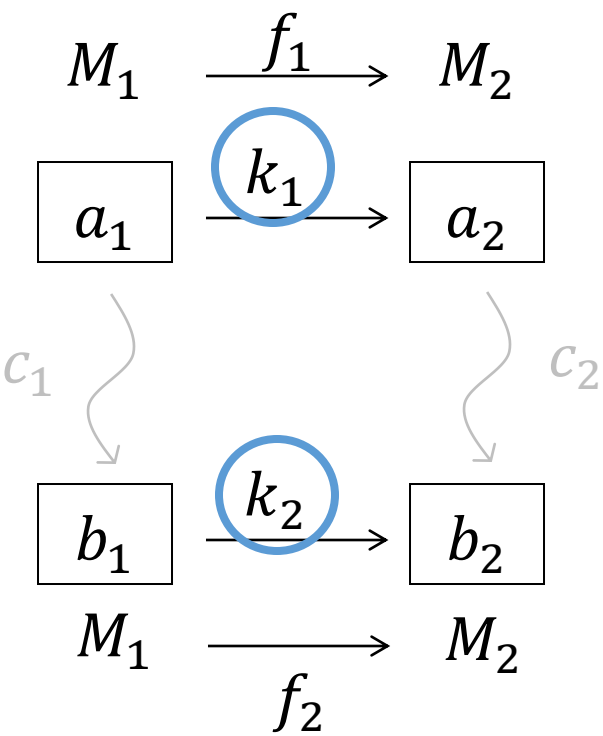
- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la razón externa

Iván: Para andar 10 km ha necesitado 2 horas
Paloma: Para andar 20 km ha necesitado 3,5 horas
¿Quién va más rápido?

Iván: Para andar 10 km ha necesitado 2 horas
Paloma: Para andar 15 km ha necesitado 3,5 horas
¿Quién va más rápido?

Iván: Para andar 10 km ha necesitado 2 horas
Paloma: Para andar 17 km ha necesitado 3,5 horas
¿Quién va más rápido?

Comparación



Comparación cualitativa: En la marca T de chicles hay más chicles en cada paquete que en los de la marca D. Por otro lado, cada paquete de la marca D es más barato que los paquetes de la marca T. ¿Qué marca de chicle es más barata?

Alumno: *No se puede saber por falta de magnitudes*

P-1: (...) ¿Qué significa eso?

A1.1: (...). No tienes números ni factores que te demuestren que sea más barato uno o más caro el otro.

P-1: Y, ¿podrías poner números y resolverlo?

Marca T	10 chicles	5 €	10 ⁵	2 chicles por cada €
Marca D	5 chicles	2,5 €	5 ^{2,5}	20 ^{16,7} chicles por cada €
		3	20	
Marca T	10	10	10 ¹⁰	1 chicle por cada €
Marca D	5	7,5	20	

Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la constante de proporcionalidad

Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la constante de proporcionalidad

Un ganadero tiene pienso para alimentar a 30 terneros durante 90 días. Si tuviese 20 terneros, ¿durante cuántos días los podría alimentar?

A Azucena, le queremos regalar una taza que hemos visto en la tienda y sabemos que le va a gustar. Si participamos 10 personas salimos a 0,50 € por persona. ¿Cuánto tendríamos que poner si participásemos 20 personas?

Un elemento que es imprescindible tener en cuenta en las situaciones de proporcionalidad inversa es el de dotar de significado al producto de magnitudes extensivas

Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la constante de proporcionalidad

Un ganadero tiene pienso para alimentar a 30 terneros durante 90 días. Si tuviese 20 terneros, ¿durante cuántos días los podría alimentar?

Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la constante de proporcionalidad

Un ganadero tiene pienso para alimentar a 30 terneros durante 90 días. Si tuviese 20 terneros, ¿durante cuántos días los podría alimentar?

La cantidad de pienso permanece constante

Cada día alimenta a todos los terneros / Cada ternero se tiene que alimentar todos los días

Dispone de 2700 raciones (puede alimentar 2700 veces a un ternero, 2700 terneros un día)

Repartimos las raciones entre los 20 terneros

A los 20 terneros los podrá alimentar durante 135 días

Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

- Acercamiento a través del cálculo e interpretación de la constante de proporcionalidad

Un ganadero tiene pienso para alimentar a 30 terneros durante 90 días. Si tuviese 20 terneros, ¿durante cuántos días los podría alimentar?

Valor perdido

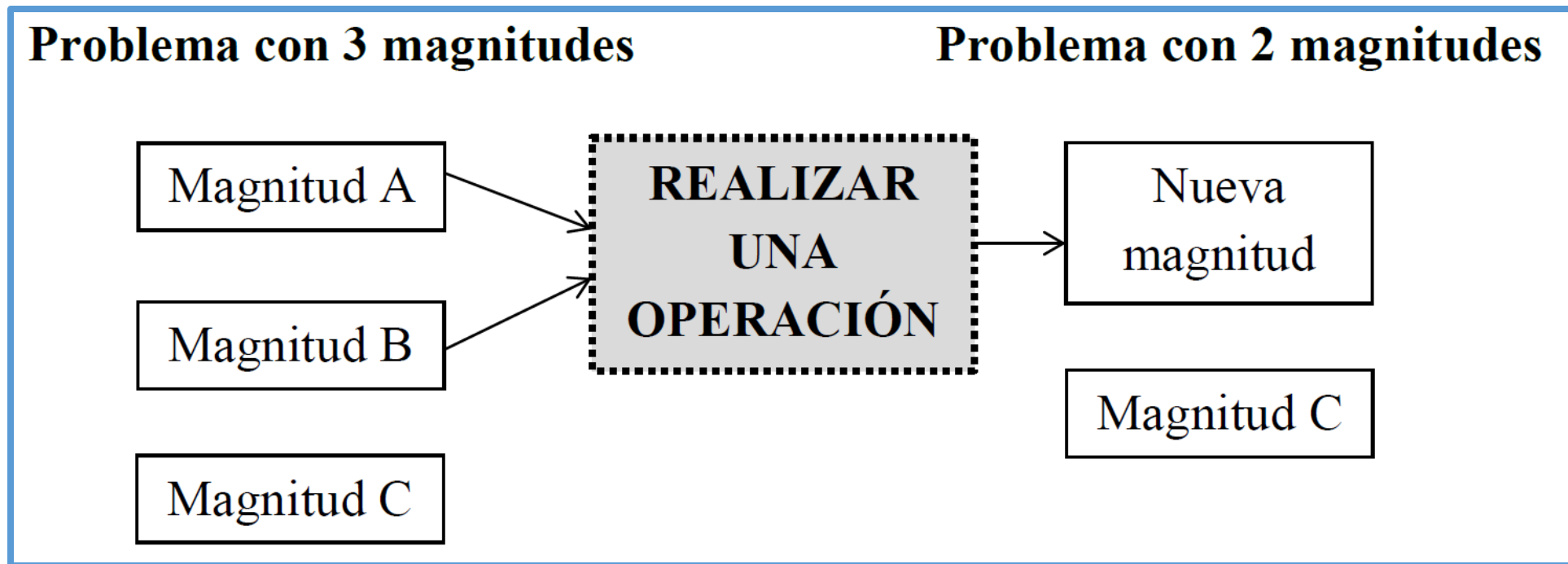
vs

Comparación

Un ganadero tiene pienso para alimentar a 30 terneros durante 90 días. Otro ganadero tiene pienso para alimentar a 20 terneros durante 130 días. ¿Qué ganadero tiene más pienso?

Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

- Conectar con los conocimientos previos
- Amalgamación



Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

- Conectar con los conocimientos previos
- Amalgamación

Problema 1: La máquina que pinta las líneas de la carretera tarda 3 días, trabajando 4 horas al día para pintar una carretera de 48 km. ¿Cuántos kilómetros puede pintar en 6 días si trabajase 5 horas al día?

Días	horas/día	km	→	horas	km
3	4	48		12	48
6	5	?		30	120

$$\begin{array}{r} 48 \overline{) 120} \\ \underline{200} \end{array}$$

4 km/hora

$$30 \cdot 4 = 120 \text{ km/30 horas}$$

CR : que cada hora se hagan los mismos km.

Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

■ Para saber más...

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 37-2 (2019), 85-106
Investigaciones didácticas

<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2603>
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486



Una experiencia de investigación-
acción para la enseñanza
de la proporcionalidad compuesta

SERGIO MARTÍNEZ JUSTE, JOSÉ MARÍA MUÑOZ ESCOLANO,
ANTONIO M. OLLER MARCÉN, TOMÁS ORTEGA DEL RINCÓN

ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA
EN LIBROS DE TEXTO DE 2º DE ESO

ANALYSIS OF COMPOUND PROPORTION PROBLEMS IN 8TH GRADE TEXTBOOKS



Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) 20 (1): 95-122.

Recepción: Febrero 17, 2014 / Aceptación: Abril 2, 2015. DOI: 10.12802/relime.17.2014

TRATAMIENTO DE LA PROPORCIONALIDAD COMPUESTA
EN CUATRO LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLESⁱ

The treatment of compound proportionality in four Spanish textbooks

Sergio Martínez Juste^a, José María Muñoz Escolano^a, Antonio M. Oller Marcén^b

^aDepartamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

^bCentro Universitario de la Defensa de Zaragoza

AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática – 2015, N° 8, 95 - 115

Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad
compuesta en libros de texto españoles de
Educación Secundaria Obligatoria durante la
LOGSE-LOE-LOMCE

Sergio Martínez Juste, Universidad de Zaragoza (España)

José M. Muñoz Escolano, Universidad de Zaragoza (España)

Antonio M. Oller Marcén, Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza (España)

ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE
DISTINTOS NIVELES EDUCATIVOS ANTE PROBLEMAS DE
PROPORCIONALIDAD COMPUESTAⁱ

Strategies used by students from different years when they face compound
proportion problems

Martínez Juste, S.^a, Muñoz Escolano, J. M.^a y Oller Marcén, A. M.^b

^aDepartamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza,

^bCentro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Foco 5: Repartos proporcionales

- Contextos que favorezcan la interpretación y cálculo de la constante de proporcionalidad
- Reparto directo: Problemas de reparto monetario que **reflejen una situación inicial**
- Reparto inverso: ~~contexto monetario~~ contexto de **reparto de tiempo según velocidades**

Problema de la lotería

Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería entre las tres. Alba puso 4 €, Bea 6 € y Carmen 10 €. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

Problema del artesano

Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

Problema de reparto inversamente proporcional

- Generó una mayoría de respuestas proporcionales
- El análisis cualitativo permite valorar si aparecen razonamientos interesantes para una adecuada institucionalización

$\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ $\frac{2}{20} = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{1}{2}$ de h. en cada cabeza.

$\downarrow$

$\frac{1}{4}$ de h. por cada cuerpo.

$4 \cdot 2 = 8$
 $2 \cdot 4 = 8$

Si trabaja 6h. y dedica 2 a los cuerpos y 4 a las cabezas, hará 8 muñecos al día.

Interpretación de los inversos de los pesos: 'tiempo empleado en cada pieza'

Foco 5: Repartos proporcionales

- Para saber más

¿CÓMO RESUELVEN PROBLEMAS DE REPARTOS PROPORCIONALES ALUMNOS SIN EXPERIENCIA PREVIA?

Sergio Martínez-Juste¹ – José María Muñoz-Escolano¹ – Antonio M. Oller-Marcén²
sergiomj@unizar.es – jmescola@unizar.es – oller@unizar.es

¹Universidad de Zaragoza – ²Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza (España)

INTRODUCIENDO LOS REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES DURANTE DOS CICLOS DE INVESTIGACIÓN-ACCIÓN^{xxx}

**Introducing inverse proportional distributions during two cycles of Action-
Research**

Martínez-Juste, S.^a, Muñoz-Escolano, J. M.^a y Oller-Marcén, A. M.^b

^aUniversidad de Zaragoza, ^bCentro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados

- Interpretar el porcentaje como una relación entre dos cantidades de dos magnitudes
- Interpretar las razones asociadas

El 15 % del volumen del refresco es zumo

Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados

- Interpretar el porcentaje como una relación entre dos cantidades de dos magnitudes
- Interpretar las razones asociadas

El 15 % del volumen del refresco es zumo

Dos magnitudes “volumen de refresco” y “volumen de zumo”

Por cada 100 unidades de volumen de refresco hay 15 de esas unidades de zumo

Consideramos que se echa siempre la misma cantidad de zumo por cada unidad de volumen de refresco

15 / 100 unidades de volumen de zumo por cada una de refresco

100 / 15 unidades de volumen de refresco por cada una de zumo

- Enfoque constructivista/investigativo centrado en el **aprendizaje a través de la resolución de problemas** (Beltrán-Pellicer & Martínez-Juste, 2021; Gaulin, 2001; López & Alsina, 2015)

Introducción de nuevo contenido

Primera parte:

- Situación introductoria
- Puesta en común
- Institucionalización (opcional)

Segunda parte (opcional):

- Actividad de aula en grupos
- Puesta en común

Sin introducción de nuevo contenido

Primera parte (opcional):

- Puesta en común tarea para casa

Segunda Parte:

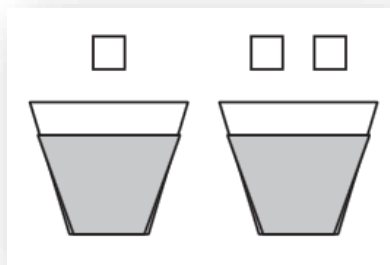
- Actividad de aula en grupos
- Puesta en común

Trayectoria de aprendizaje

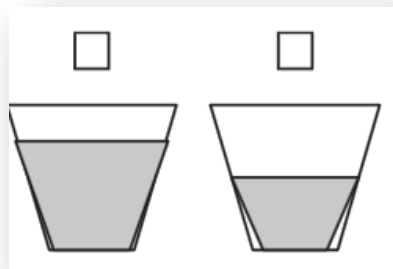
Trayectoria de aprendizaje

- Primer ciclo de Educación Primaria (también infantil)
 - Iniciación al pensamiento relativo.

EJEMPLO ¿Un zumo sabrá más dulce que el otro o tendrán el mismo sabor?



Y lo mismo con esta otra situación.



Fuente: Nunes, et al. (2003).

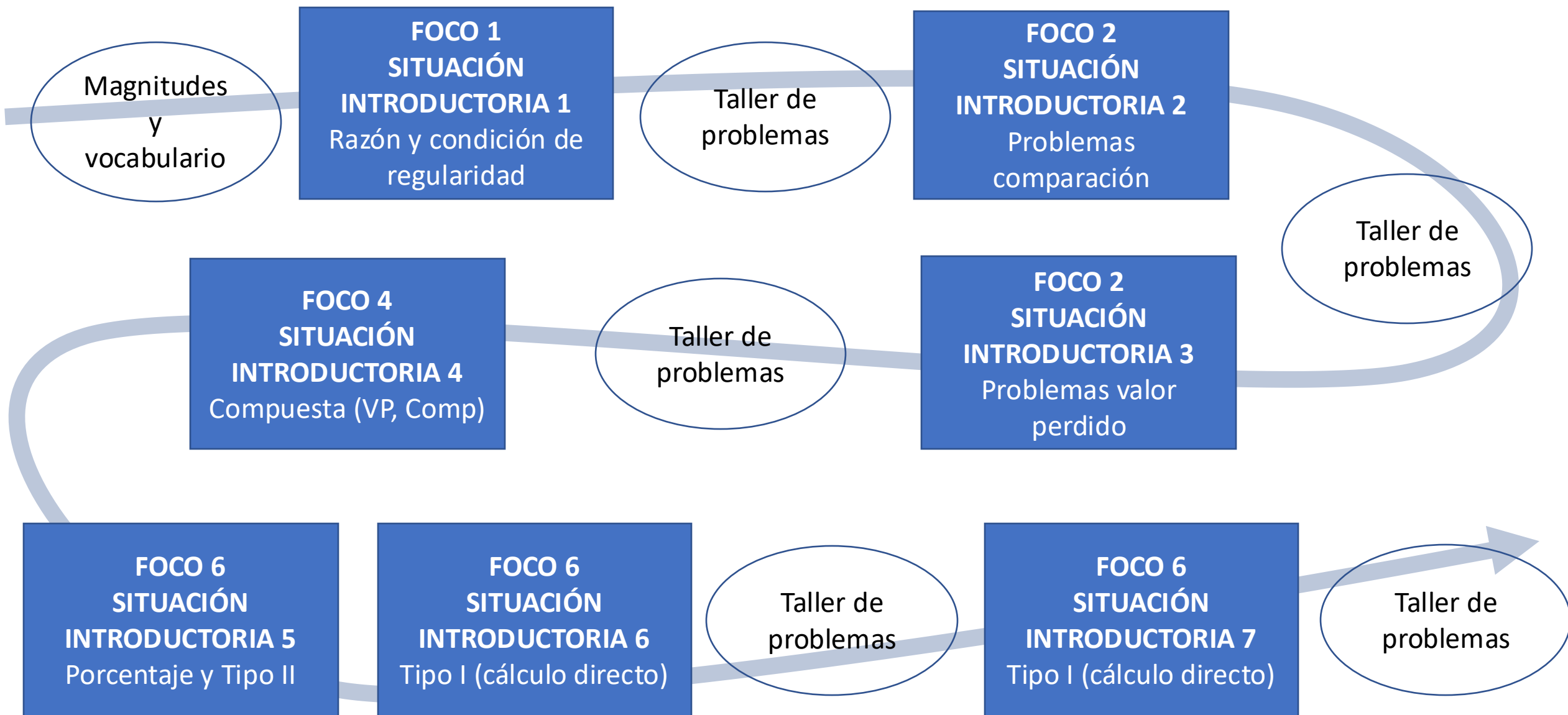
Trayectoria de aprendizaje

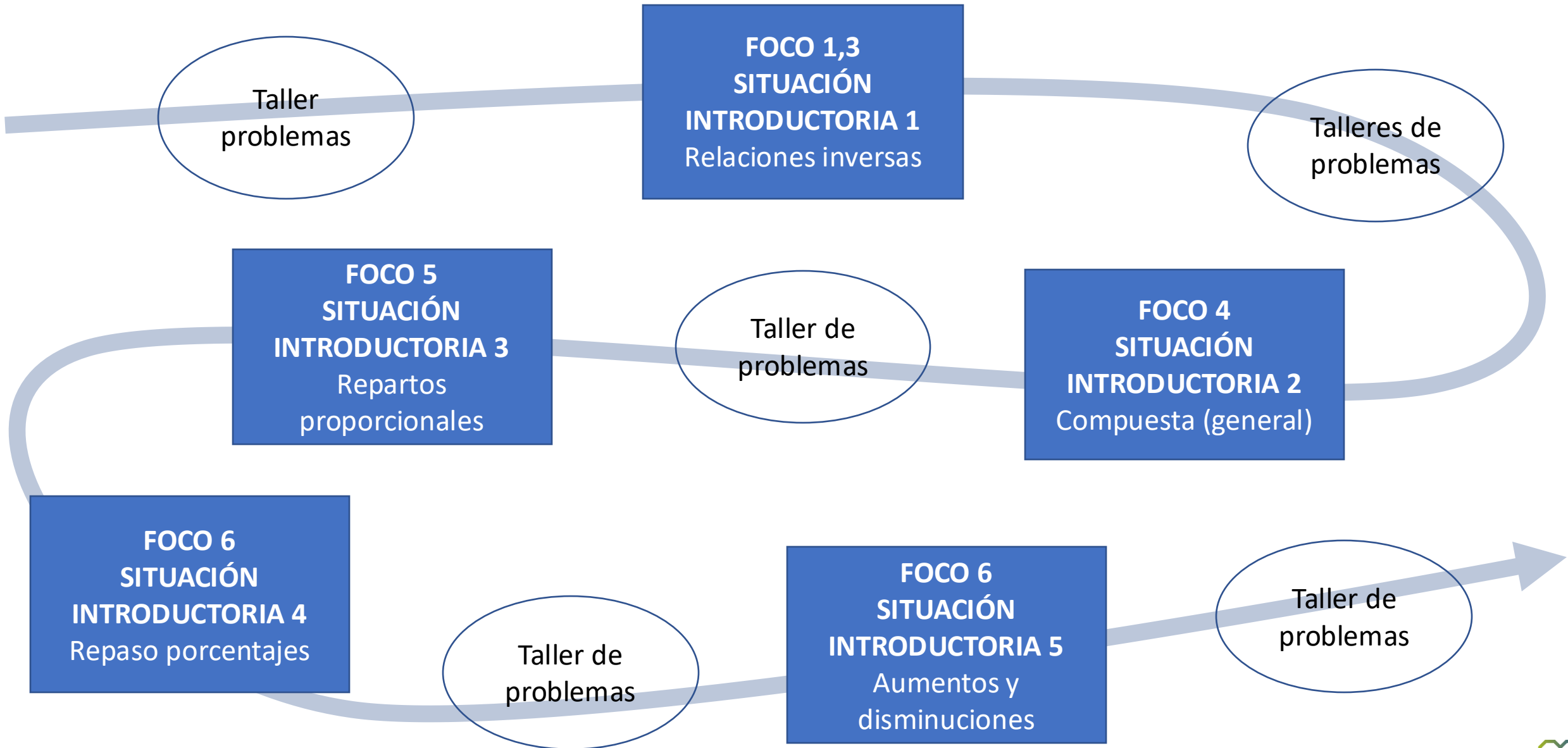
- Primer ciclo de Educación Primaria (también infantil)
 - Iniciación al pensamiento relativo
- Segundo ciclo de Educación Primaria
 - Razón entre magnitudes: introducción a su cálculo e interpretación
 - (Ligado a las estructuras semánticas multiplicativas)
- Tercer ciclo de Educación Primaria
 - **Situaciones proporcionales y no proporcionales** en problemas de la vida cotidiana: **identificación como relación multiplicativa** entre magnitudes.
 - **Resolución de problemas de proporcionalidad en contextos diversos** cercanos al alumnado (vida cotidiana, porcentajes, escalas, ...) **reflexionando a partir de las razones involucradas.**

Trayectoria de aprendizaje

En Educación Secundaria Obligatoria

- **Tratamiento aritmético**
- Modelización funcional de las relaciones proporcionales
- Tratamiento geométrico (semejanza)
- Aplicaciones funcionales (tasas de variación, pendientes, interpolación,...)
- Aplicaciones geométricas (trigonometría)





Problemas introductorios

Problemas introductorios

FICHA	2.1	EQUIPO		FECHA	
ALUMNO 1:					
ALUMNO 2:					

Intenta responder a las siguientes cuestiones:

- RAZÓN
- SIGNIFICADO DE RAZÓN
- CONDICIÓN DE REGULARIDAD
- RAZÓN INVERSA

Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15€ ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?

Unos amigos fueron al supermercado el día 30 y les cobraron 15 € ¿Cuánto hubieran pagado el día 1? ¿En qué día se paga 1€?

Problemas introductorios

Ejemplo 1 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15€ ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?

No se puede porque cada producto puede valer una cosa diferente.

-Se podría resolver si los 30 productos son iguales.

$$15 : 30 = 0,5 \quad / \quad 2 \text{ producto } (1 : 0,5 = 2)$$

Unos amigos fueron al supermercado el día 30 y les cobraron 15 € ¿Cuánto hubieran pagado el día 1? ¿En qué día se paga 1€?

No se puede porque le costará lo mismo.

Problemas introductorios

Ejemplo 1 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15€ ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?

Cuesta 0'50 €

Puede comprar 2 productos con 1 €

Unos amigos fueron al supermercado el día 30 y les cobraron 15 € ¿Cuánto hubieran pagado el día 1? ¿En qué día se paga 1€? $\nrightarrow$ No se resuelve

Lo mismo.

Problemas introductorios

Ejemplo 1 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15€ ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?

$$\begin{array}{r} 150/30 \\ 000,5\text{€} \end{array}$$

$$1 : 0,5 = 2$$

Un producto cuesta 0,5€. 2 productos

Unos amigos fueron al supermercado el día 30 y les cobraron 15 € ¿Cuánto hubieran pagado el día 1? ¿En qué día se paga 1€?

No se sabe porque el día 30 no es una magnitud

Problemas introductorios

Ejemplo 1 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15€ ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 15} \\ \underline{0} \\ 15 \\ \underline{15} \\ 0 \end{array}$$

- Un producto cuesta 2 euros.
- No puedes comprar nada con 1€ porque vale 2€.

Unos amigos fueron al supermercado el día 30 y les cobraron 15 € ¿Cuánto hubieran pagado el día 1? ¿En qué día se paga 1€?

No hay manera/No se puede.

Problemas introductorios

Ejemplo 1 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15€ ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?

Lo puede calcular si mediamos los precios de los productos o si todos valen lo mismo.

Si todos valen lo mismo 1 producto cuesta 50 cent: $15 : 30 = 0.50$
Con 1€ podemos comprar 2 productos $0.50 \cdot 2 = 1€$

Unos amigos fueron al supermercado el día 30 y les cobraron 15 € ¿Cuánto hubieran pagado el día 1? ¿En qué día se paga 1€?

Lo mismo
En invierno

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I.

- REPARTOS
DIRECTAMENTE
PROPORCIONALES

FICHA	8.1	EQUIPO		FECHA	24-3-17
ALUMNO 1:					
ALUMNO 2:					

- REPARTOS
INVERSAMENTE
PROPORCIONALES

Problema 1: Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I.

- REPARTOS
DIRECTAMENTE
PROPORCIONALES
- REPARTOS
INVERSAMENTE
PROPORCIONALES

FICHA	8.1	EQUIPO		FECHA	24-3-17
ALUMNO 1:					
ALUMNO 2:					

Problema 1: Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

Problema 2: Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Problema 1: Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

	Alba	Bea	Carmen	Premio
Dinero:	4€	6€	10€	3000€

$4 + 6 + 10 = 20€$ pagan entre todas.

$3000€ : 20€ = 150€$ de premio por cada € que has puesto

$$\left. \begin{array}{l} A = 150 \cdot 4 = 600€ \\ B = 150 \cdot 6 = 900€ \\ C = 150 \cdot 10 = 1500€ \end{array} \right\} \text{Dinero le toca a cada una.}$$

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Problema 1: Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

Carmen 50% = 1500€

Bea 30% = 900€

Alba 20% = 600€

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Problema 1: Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

Directamente proporcionales

CR = cada persona cobre lo mismo

Carmen cobrara más porque ha puesto más

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Problema 1: Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

magnitudes valor económico

Discretamente proporcionales

$$\frac{3000}{4+6+10} = 1000$$

$$\text{Alba} = 1000 \cdot 4 = 4000 \text{ €}$$

$$\text{Bea} = 1000 \cdot 6 = 6000 \text{ €}$$

$$\text{Carmen} = 1000 \cdot 10 = 10000 \text{ €}$$

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Problema 2: Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

Magnitudes: piezas y tiempo.

CR: Que tarde el mismo tiempo en hacer cada pieza.

Inversamente proporcionales.

cuerpos: 4 piezas 1h
cabezas: 2 piezas 1h } para las cabezas tardarán
el doble por eso dedicando
4h hacen 8 piezas de cabezas y
para el cuerpo otras 8 piezas.
Para la cabezas 4h y para el cuerpo 2h.
para que haya muñecos enteros

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Problema 2: Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

Piezas	Cabezas	Cuerpos	total h día
Horas	2 piezas/h	4 piezas/h	6h

CR -> Que cada pieza le cueste lo mismo hacerla.

$$6 \div 2 = 3 \text{ piezas /h}$$

3 piezas/h de cabezas } Tres muñeco por hora
3 piezas/h de cuerpos }

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Problema 2: Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

Si trabaja 6h. y dedica 2 a los cuerpos y 4 a las cabezas,
hará 8 muñecos al día.

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I. ¿Qué se obtiene?

Problema 2: Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 6} \\ 40 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \overline{) 6} \\ 20 \\ \hline 03 \end{array} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ de h. en cada cabeza.}$$

↓

$$\frac{1}{4} \text{ de h. por cada cuerpo.}$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

Si trabaja 6h. y dedica 2 a los cuerpos y 4 a las cabezas,
hará 8 muñecos al día.

Problemas introductorios

Ejemplo 2 de S.I. Institucionalización

- Aprovechar las oportunidades de aprendizaje para la institucionalización.
- Dotar de sentido a las “técnicas”.

$$\frac{\text{Cantidad a repartir}}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = k$$

$$X_i = k \cdot x_i$$

$$\frac{3000}{4 + 6 + 10} = 150 \text{ € de premio por cada € de billete}$$

Ana ha puesto 4 € para el billete,
le tocan $150 \cdot 4 = 600$ € de premio

$$\frac{\text{Cantidad a repartir}}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = k$$

$$X_i = k/x_i$$

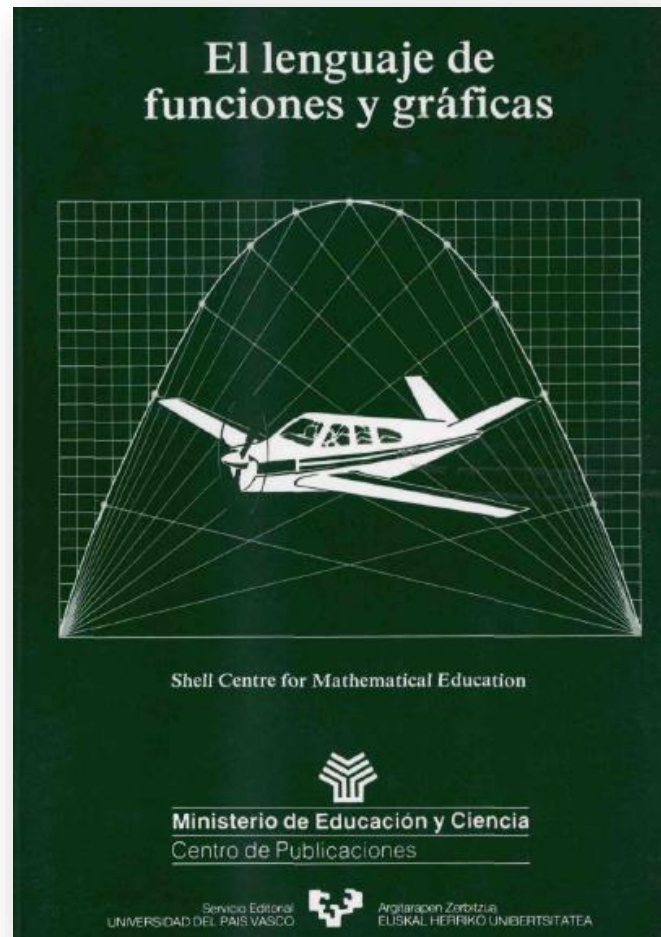
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} h \text{ tarda en hacer cada muñeco}$$

$$\frac{6}{\frac{3}{4}} = 8 \text{ muñecos puede hacer en 6 horas}$$

Tiene que invertir $8:4=2$ horas en hacer cada cuerpo.

Más allá de la aritmética

Más allá de la aritmética



Más allá de la aritmética

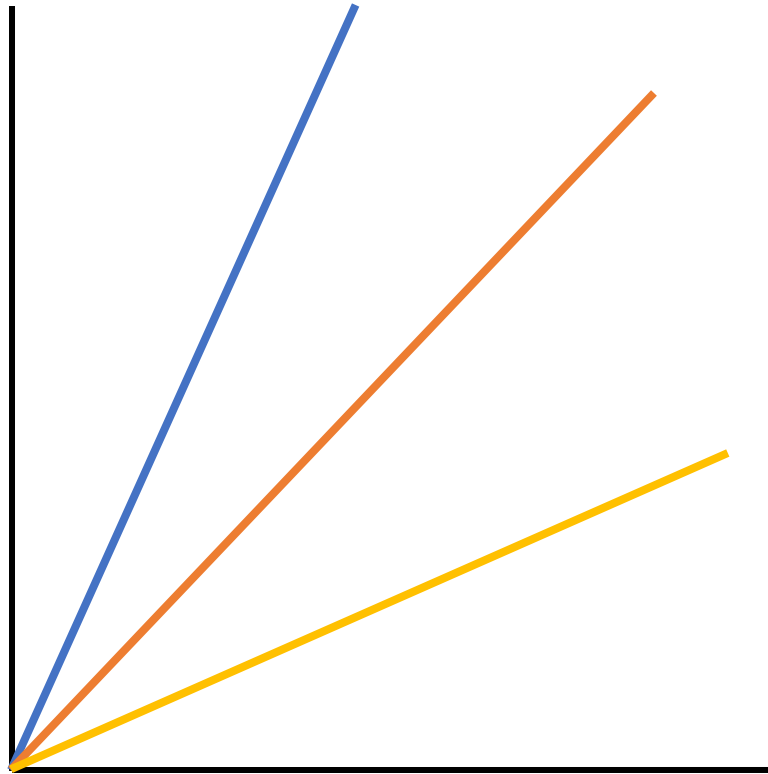
3. Llamadas telefónicas

Un fin de semana, cinco personas hicieron llamadas telefónicas a varias partes del país. Anotaron el precio de sus llamadas y el tiempo que estuvieron en el teléfono en la siguiente gráfica:



- ¿Quién puso una llamada a larga distancia? Explica con cuidado tu razonamiento.
- ¿Quién realizó una llamada local? Explicalo.
- ¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente? Explicalo de nuevo.
- Copia la gráfica y marca otros puntos que representen a personas que hicieron llamadas locales de diversa duración.
- Si hicieras una gráfica similar mostrando todas las llamadas telefónicas realizadas desde Bilbao durante un fin de semana, ¿cómo sería? Dibuja un esquema e indica claramente las suposiciones que haces.

Más allá de la aritmética



Más allá de la aritmética

La modelización.

- Elevar el nivel de algebrización.
- Buscar patrones y generalidades.
- Dar significado a la razón externa.
- Cambios de sistemas de representación.

Tabular, verbal, simbólico, algebraico,...

Más allá de la aritmética

Construimos una tabla:

Litros de batido	1	2	3	4
Bolas de helado	3	6	9	12

The diagram illustrates the direct proportionality between the number of batido liters and ice cream balls. It shows two rows of a table: 'Litros de batido' and 'Bolas de helado'. The values are 1, 2, 3, 4 for batido and 3, 6, 9, 12 for ice cream balls. Blue arrows with red labels 'x2' and 'x4' show the scaling factors between the columns. From 1 to 2 batido, ice cream balls double from 3 to 6 (x2). From 1 to 4 batido, ice cream balls quadruple from 3 to 12 (x4). Similar arrows are shown for the other columns.

Al utilizar el doble o el triple de helado obtenemos el doble o el triple de batido. Son magnitudes **directamente proporcionales**.

Así, se obtendrán 4 litros de batido con 12 bolas de helado.

Algunos resultados de la investigación

Algunos resultados de la investigación

Comparativa con el grupo de control – Categorías generales

Ciclo II-2

		N+B+I	C	p-valor
PE.1.1	GE	45 %	55 %	0,2003
	GC	70 %	30 %	
PE.1.2	GE	25 %	75 %	0,3203
	GC	45 %	55 %	
PE.1.3	GE	25 %	75 %	0,5382
	GC	5 %	95 %	
PE.1.4	GE	15 %	85 %	0,1552
	GC	40 %	60 %	
PE.2.1	GE	40 %	60 %	0,7512
	GC	50 %	50 %	
PE.2.2	GE	50 %	50 %	1
	GC	50 %	50 %	
PE.2.3	GE	70 %	30 %	0,0915
	GC	95 %	5 %	
PE.3	GE	35 %	65 %	0,1128
	GC	65 %	35 %	

		N+B+I	C	p-valor
PE.4	GE	50 %	50 %	1
	GC	50 %	50 %	
PE.5	GE	40 %	60 %	0,5273
	GC	55 %	45 %	
PE.6	GE	5 %	95 %	0,0000
	GC	85 %	15 %	
PE.7	GE	25 %	75 %	0,1053
	GC	55 %	45 %	
PE.8	GE	35 %	65 %	0,3406
	GC	55 %	45 %	
PE.9.1	GE	15 %	85 %	0,0407
	GC	50 %	50 %	
PE.9.2	GE	45 %	55 %	0,0001
	GC	100 %	0 %	

Algunos resultados de la investigación

		N+B+I	C	p-valor
PE.1.1	GE	45 %	55 %	0,2003
	GC	70 %	30 %	
PE.1.2	GE	25 %	75 %	0,3203
	GC	45 %	55 %	
PE.1.3	GE	25 %	75 %	0,5382
	GC	5 %	95 %	
PE.1.4	GE	15 %	85 %	0,1552
	GC	40 %	60 %	
PE.2.1	GE	40 %	60 %	0,7512
	GC	50 %	50 %	
PE.2.2	GE	50 %	50 %	1
	GC	50 %	50 %	
PE.2.3	GE	70 %	30 %	0,0915
	GC	95 %	5 %	
PE.3	GE	35 %	65 %	0,1128
	GC	65 %	35 %	

		N+B+I	C	p-valor
PE.4	GE	50 %	50 %	1
	GC	50 %	50 %	
PE.5	GE	40 %	60 %	0,5273
	GC	55 %	45 %	
PE.6	GE	5 %	95 %	0,0000
	GC	85 %	15 %	
PE.7	GE	25 %	75 %	0,1053
	GC	55 %	45 %	
PE.8	GE	35 %	65 %	0,3406
	GC	55 %	45 %	
PE.9.1	GE	15 %	85 %	0,0407
	GC	50 %	50 %	
PE.9.2	GE	45 %	55 %	0,0001
	GC	100 %	0 %	

Porcentajes

Algunos resultados de la investigación

		N+B+I	C	p-valor
PE.1.1	GE	45 %	55 %	0,2003
	GC	70 %	30 %	
PE.1.2	GE	25 %	75 %	0,3203
	GC	45 %	55 %	
PE.1.3	GE	25 %	75 %	0,5382
	GC	5 %	95 %	
PE.1.4	GE	15 %	85 %	0,1552
	GC	40 %	60 %	
PE.2.1	GE	40 %	60 %	0,7512
	GC	50 %	50 %	
PE.2.2	GE	50 %	50 %	1
	GC	50 %	50 %	
PE.2.3	GE	70 %	30 %	0,0915
	GC	95 %	5 %	
PE.3	GE	35 %	65 %	0,1128
	GC	65 %	35 %	

		N+B+I	C	p-valor
PE.4	GE	50 %	50 %	1
	GC	50 %	50 %	
PE.5	GE	40 %	60 %	0,5273
	GC	55 %	45 %	
PE.6	GE	5 %	95 %	0,0000
	GC	85 %	15 %	
PE.7	GE	25 %	75 %	0,1053
	GC	55 %	45 %	
PE.8	GE	35 %	65 %	0,3406
	GC	55 %	45 %	
PE.9.1	GE	15 %	85 %	0,0407
	GC	50 %	50 %	
PE.9.2	GE	45 %	55 %	0,0001
	GC	100 %	0 %	

Relaciones de proporcionalidad inversa

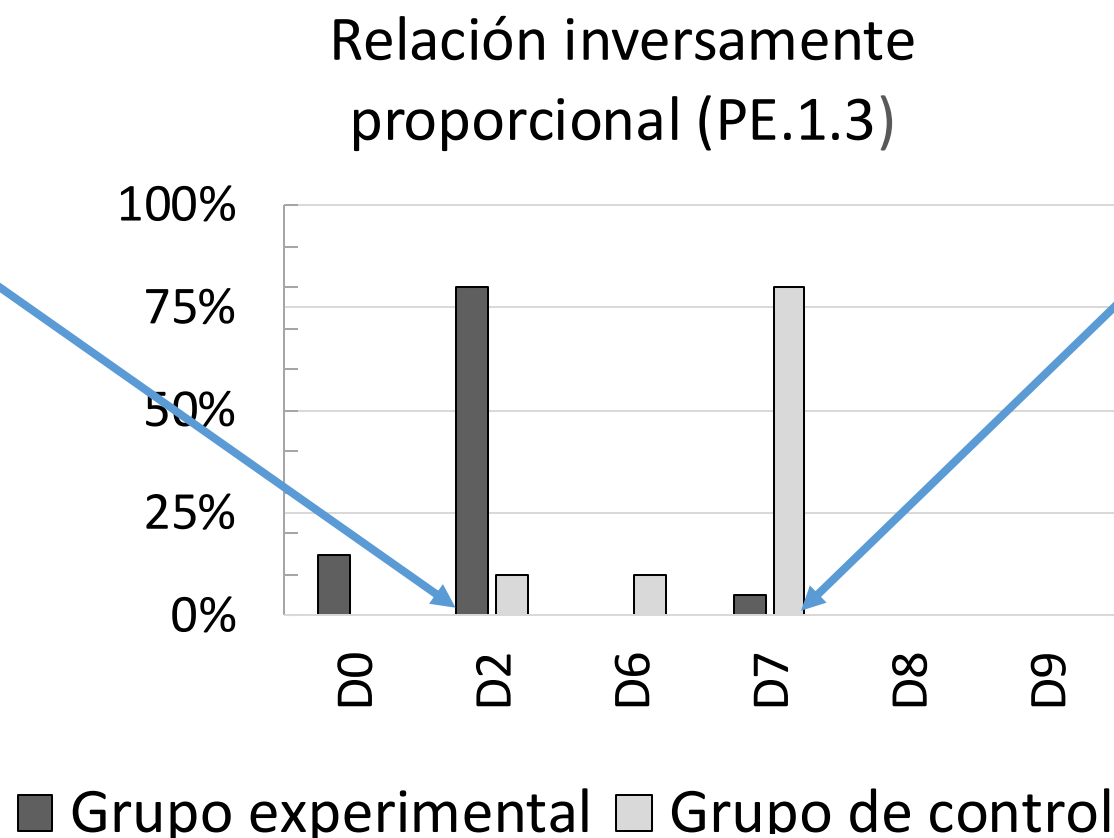
Algunos resultados de la investigación

Comparativa con el grupo de control – Categorías específicas

Ciclo II-2

Caracterización por
constancia

Caracterización
(errónea) por
aumentos y
disminuciones



Algunos resultados de la investigación

Comparación con los grupos de control

- Los alumnos de los **grupos experimentales obtienen mejores resultados en 28 de los 32 ítems** que componen las pruebas escritas
- En 13 ítems estos mejores resultados son estadísticamente significativos al 95 %
- **Ningún ítem con diferencia significativa a favor de los grupos de control**
- En los **grupos experimentales** se detecta **mayor versatilidad y calidad argumentativa**
- En los **grupos de control** se detectan **argumentos erróneos y estrategias algoritmizadas**



Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas



**GOBIERNO
DE ARAGON**

arcomat



MINISTERIO
DE EDUCACIÓN, FORMACIÓN PROFESIONAL
Y DEPORTES



PCT de refuerzo de la
**COMPETENCIA
MATEMÁTICA**

Muchas gracias

Sergio Martínez Juste

smartinezju@aragon.es

Coordinador programa ARCOMAT